SOC
7130

BOUND 1939

HARVARD UNIVERSITY

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY

167

AUG 18 1919

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

LIBRARY
CAMBRIDGE, MASS.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE

TOME X

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez WILLIAMS et NORGATE,	chez HERMANN, libraire,	chez FRIEDLÄNDER u. Sohn
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 6.	Karlstrasse, 11.

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

1914

A

AUG 18 1919

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE

TOME X

DÉPOTS :

LONDRES,
chez WILLIAMS et NORGATE,
Henrietta Str., 14.

PARIS,
chez HERMANN, libraire,
rue de la Sorbonne, 6.

BERLIN,
chez FRIEDLÄNDER u. Sohn,
Karlstrasse, 11.

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

1914

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME X.

1. Étude optique des cristaux de dulcine et de saccharine en vue de leur recherche dans la bière, par Arthur Abraham.
2. Sur certains groupes de trois cercles coaxiaux, par J. Neuberg.
3. Observation sur le problème de la division d'un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à sa base, par G. Cesàro.
4. Développements asymptotiques dans les équations différentielles linéaires à paramètre variable (errata et addenda), par Paul Noaillon.
5. Sur les équicentres de deux systèmes de n points, par J. Neuberg.
6. Sur les carrés panmagiques, par Édouard Barbette.
7. Carré magique du 16^{me} ordre à symétrie complète, par Édouard Barbette.
8. Sur la compensation des angles d'un quadrilatère, par M. Kraïtchik.
9. Les actions pondéromotrices des corps électrisés, par S. Pienkowski.
10. Coup d'œil sur les méthodes employées pour déterminer la rigidité du globe, par Henry Janne.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(JUIN 1914).

Bureau.

Président,	MM. J. Neuberg.
Vice-Président,	H. Micheels.
Secrétaire général,	C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	J. Fairon.

Membres effectifs.

1878 le Paige, C., administrateur inspecteur de l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur émérite à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 Urachs, P., docteur en sciences, répétiteur émérite à l'université.

1885 Gravis, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1887 Lohest, M., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur en chef au corps des mines.

1897 Cesàro, G., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Micheels, H., docteur en sciences, professeur à l'Athénée royal de Liége.

1898 Hubert, H., professeur à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1900 Lonay, H., docteur en sciences, chargé de cours à l'École spéciale de commerce annexée à l'université.

1902 Dehalu, M., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.

Fairon, J., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.

1906 Abraham, A., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1909 Gob, A., professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Liége.

1912 Janne, H., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

Damas, D., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.

1871 Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

1873 Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1875 Mansion, P., professeur émérite à l'université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique.

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1881 Sébert, à Paris.

Angot, A., directeur du bureau central météorologique de France, à Paris.

Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.

Laisant, C.-A., à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

1885 Gomès Teixeira, F., directeur de l'Académie polytechnique de Porto.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).

1887 Guccia, professeur à l'université de Palerme.

Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.

Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.

Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.

Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

1902 Versluys, W.-A., docteur en sciences, professeur à l'École polytechnique de Delft.

1904 Lerch, Math., professeur à l'université de Brünn.

Schönfliess, professeur à l'université de Kœnigsberg.

Meyer, Franz, professeur à l'université de Kœnigsberg.

W. Kapteyn, professeur à l'université d'Utrecht.

1905 Traube, professeur, à Charlottenbourg.

1909 Haton de la Goupillière, membre de l'Institut, à Paris.

Dickstein, S., professeur à Varsovie.

Lebon, E., professeur agrégé de l'université, à Paris.

Mahlet, E., docteur ès sciences mathématiques, à Bourg-la-Reine.

1912 Picard, E., membre de l'Institut, à Paris

1912 Painlevé, P., membre de l'Institut, à Paris.

de la Vallée Poussin, Ch., professeur à l'université de Louvain, membre de l'Académie royale de Belgique.

Demoulin, A., professeur à l'université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique.

1914 Servais, Cl. professeur à l'université de Gand.

II. — Sciences naturelles.

1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1870 Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne, recteur de l'université.

1875 De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur à l'université de Lund.

1874 Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Ray-Lankester, directeur du *Britisch Museum (Natural history)*.

Packard, professeur à l'université de Salem.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.

Bolivar, I., professeur, à Madrid.

Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

1881 Taramelli (commandeur), professeur à l'université de Pavie, recteur de l'université.

Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.

Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.

1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

1898 Bertrand, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.

Blanchard, Raphaël, professeur à la faculté de médecine, à Paris.

1904 Barrois, C., professeur à l'université de Lille, membre de l'Institut.

Boule, Marcellin, professeur au Muséum, à Paris.

Oehlert, D., conservateur du Musée de Laval (Mayenne).

1904 PORTIS, A., professeur à l'université de Rome.

VON KOENEN, A., professeur à l'université de Gœttingen.

DE LORIOL, P., géologue, à Fontenex.

GRAND'EURY, F., ingénieur, à Saint-Étienne, correspondant de l'Institut.

DE ROUVILLE, P., doyen honoraire, à Montpellier.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Musée royal d'histoire naturelle.
Société royale belge de botanique.
Société belge de microscopie.

Liége. — *Société géologique.*
Association des élèves des Écoles spéciales.

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).
Deutsche entomologische Gesellschaft.

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Magdebourg. — *Museum für Natur und Heimatkunde*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Wirtinger.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik* : Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*
Université.

Lyon. — *Académie des sciences, des belles-lettres et des arts* (Palais des Arts).
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences* (*ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg*).

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.
L'intermédiaire des mathématiciens, M. LAISANT (quai des Augustins, 55).

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE

Cambridge. — *Philosophical Society.*

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Natural history Society.*
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze* (classe des sciences physiques et mathématiques).
Accademia delle Scienze (classe des sciences morales).

Catane. — *Accademia gioenia di Scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Reale Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Milan. — *Reale istituto lombardo di Scienze e Lettere.*
Societa lombarda di Scienze mediche e biologiche.

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di Scienze naturali ed economiche, Regia Universita.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Portici. — *Reale scuola superiore die agricultura.*

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.
Société italienne pour l'avancement des Sciences.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal Grand-Ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société des naturalistes luxembourgeois.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *Académie technique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

NORWÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*
Videnskabs Selskabst.

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

PORTUGAL.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

Porto. — *Académie polytechnique, directeur :* M. Gomès Teixeira

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Kischinew. — *Société des naturalistes de Bessarabie.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

Varsovie. — *Wiadomosci matematyczne.*

SUÈDE.

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Genève. — *L'enseignement mathématique*, directeurs : MM. Fehr et Laisant.

Neuchâtel. — *Société des sciences naturelles.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

—

ÉTATS-UNIS.

Arbor (Mich). — *University of Michigan (Library)*

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Berkeley (Col.) — *University of California (Press).*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge (Mass.). — *Museum of comparative Zoology.*

Chicago. — *Field Museum of natural history.*

Cincinnati (O.) — *American association for the advancement of sciences.*

Cold Spring Harbor (N.Y.). — *Carnegie Institution (station for experimentale evolution ;* directeur : M C. B. Davenport).

Colorado. — *Colorado College* (bureau des publications),

Des Moines (Iowa). — *Geological Survey.*

Lawrence (Kan). — *The Kansas University.*

Lincoln (Neb.). — *University of Nebraska.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*
Geological Survey.

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis (Mo). — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Urbana (Ill.). — *University of Illinois library.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*
Bureau of ethnology.

CANADA.

Halifax. — *Nova Scotian Institute of natural Science.*

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Merida. — *Observatoire.*

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

URUGUAY.

Montevideo. — *Museo de historia natural.*

ASIE.

—

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*
Koninklijke magnétisch en météorologisch Observatorium.

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

—

Adelaïde. — *Royal Society of South Australia.*

Hobart-Town. — *Tasmania society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Australian Association for advancement of science*
Linnean Society.
Royal Society of New South Wales.

ÉTUDE OPTIQUE

DES

CRISTAUX DE DULCINE ET DE SACCHARINE

EN VUE

DE LEUR RECHERCHE DANS LA BIÈRE

PAR

Arthur ABRAHAM

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

ÉTUDE OPTIQUE

DES

CRISTAUX DE DULCINE ET DE SACCHARINE

EN VUE

DE LEUR RECHERCHE DANS LA BIÈRE

I. — Dulcine.

La dulcine se présente en petits cristaux blancs lamellaires qui, examinés au microscope, se montrent sous deux aspects différents : en petites lamelles rectangulaires ou en aiguilles assez allongées et aplaties.

Premier type. — Sous la forme de minces lamelles rectangulaires, ces cristaux peuvent atteindre 3 à 4 centièmes de millimètre de large sur 6 à 8 de long ; ils montrent, en lumière parallèle et nicols croisés, une teinte de polarisation basse, qui, dans la plupart des cas, par superposition du mica quart d'onde, monte au jaune de premier ordre ou descend à la compensation.

Les axes de l'ellipse de section sont dirigés suivant les côtés du rectangle et la superposition du mica quart d'onde indique que l'*allongement est positif*.

En lumière convergente, on voit les deux branches hyperboliques (sans lemniscates) caractéristiques des biaxes, branches qui montrent le plan des axes optiques perpendiculaire à la direction d'allongement.

Biréfringence. — 1re lamelle : R = 16,3 ; *e* = 2,1, X = 8,3
2me lamelle : R = 18,6 ; *e* = 2,2, X = 8
3me lamelle : R = 15,6 ; *e* = 2,1, X = 7,4

En raison des difficultés que l'on éprouve à déterminer avec exactitude des épaisseurs aussi faibles par la double mise au point, on peut évaluer la biréfringence de ces lamelles très approximativement à 8.

De ces différentes considérations, on peut donner à ces

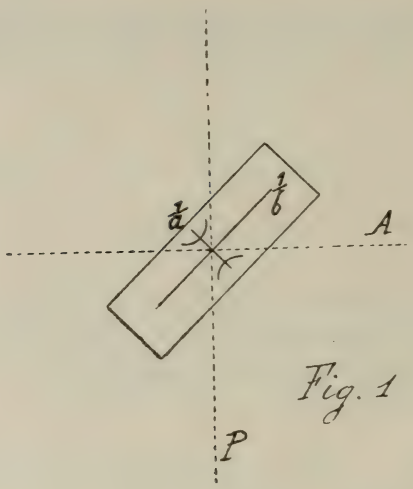


Fig. 1

lamelles l'orientation optique représentée par la figure 1 ci-contre et les définir comme suit :

Lamelles rectangulaires blanches, optiquement orthorhombiques, teinte de polarisation basse, allongement positif, plan des axes optiques perpendiculaire à la direction d'allongement, biréfringence 8.

Second type. — Cette seconde espèce de cristaux de dulcine se présente en aiguilles aplaties, formées par la superposition de minces lamelles soudées par leur plan d'aplatissement. Les extrémités en sont toujours brisées, ce qui ne permet pas d'assigner une dimension précise à la longueur des aiguilles. La largeur ne dépasse que rarement 10 à 12 centièmes de millimètre.

Vues sur la tranche, ces aiguilles sont striées longitudinalement; ces stries sont les traces des plans de jonction des lamelles. Dans cette position, aucune détermination optique n'est possible.

Vues à plat, les aiguilles sont striées transversalement; ces stries, différentes des précédentes, sont les traces suivant lesquelles plusieurs plages d'une même lame se soudent.

Examinées en lumière parallèle et entre nicols croisés, on remarque dans ces lamelles une teinte de polarisation sensiblement supérieure à celle du type 1. Ce fait provient, comme nous le verrons tantôt, de ce que les lamelles sont plus épaisses.

Cette teinte de polarisation n'est pas uniforme dans une même aiguille; de plus, les différentes plages d'une même aiguille sont différemment orientées, car elles ne s'éteignent pas toutes en même temps entre nicols croisés. Ce sont les limites de ces différentes plages qui constituent les stries transversales signalées ci-dessus.

En rapportant à la direction d'allongement des aiguilles l'angle sous lequel l'extinction des différentes plages se produit, on trouve que cet angle est de 30° *dans un sens* pour certaines plages, et 30° *dans le sens opposé* pour les autres.

Cette disposition constitue un groupement maclé dont la figure 2 donne une idée. Ainsi les plages numérotées 3 et 5 s'éteignent *alternativement* sous un angle de 30° avec la direction d'allongement de l'aiguille. On remarque aussi que certaines plages, telles que 4, ne s'éteignent jamais entre nicols croisés. Ce fait est dû au chevauchement des deux plages 3 et 5 l'une sur l'autre dans toute l'étendue de la plage 4. Ce fait, qui dans ce cas n'intéresse que la plage 4, c'est-à-dire une

partie de l'aiguille, se présente parfois sur toute l'étendue d'une même aiguille.

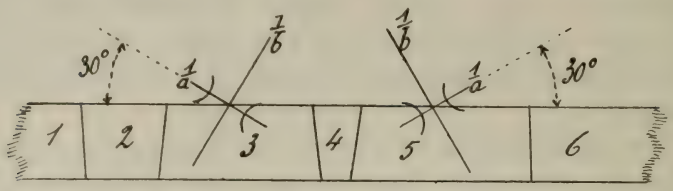


Fig. 2

Par superposition du mica quart d'onde, on trouve que *l'axe qui est à 30° de la direction d'allongement est négatif.*

En lumière convergente, on n'aperçoit, dans la plupart des cas, que deux branches hyperboliques, qui placent le plan des axes optiques suivant la direction négative des plages. Le plan des lamelles est donc, comme dans le type 1, perpendiculaire à la bissectrice $\frac{1}{c}$.

Parmi les nombreuses aiguilles que j'ai examinées, je n'en ai rencontré que quelques-unes d'épaisseur et de surface suffisantes qui montraient très nettement la figure *complète* des biaxes : lemniscates et branches hyperboliques. J'en ai profité pour répéter la détermination optique que j'ai trouvée absolument conforme à ce qui précède. J'ai, de plus, déterminé très nettement au moyen du biseau de quartz le *signe positif du cristal.*

Biréfringence. — 1re lamelle : R = 58,82; $e = 7$, X = 8,3
2me lamelle : R = 47,15; $e = 5{,}8$, X = 8,1
3me lamelle : R = 39,4; $e = 4{,}6$, X = 8,5

Le second type des cristaux de dulcine représenté par la figure 2 peut se définir comme suit :

Aiguilles aplaties, striées transversalement, blanches, à teinte de polarisation légèrement supérieure à celle du type 1, formées

de plages maclées s'éteignant à 30° de la direction d'allongement. C'est suivant cette direction d'extinction que se trouve le petit axe de l'ellipse de section et le plan des axes optiques. Cristaux positifs, biréfringence 8.

Interprétation des deux types de cristaux de dulcine. — Les deux types de cristaux que nous venons d'examiner et qui paraissent si dissemblables ne sont en réalité qu'un même cristal : simple dans le premier cas, il est maclé dans le second. Ils ont même biréfringence et même surface d'aplatissement perpendiculaire à $\frac{1}{c}$.

Dans le second cas, les plages à extinction oblique se

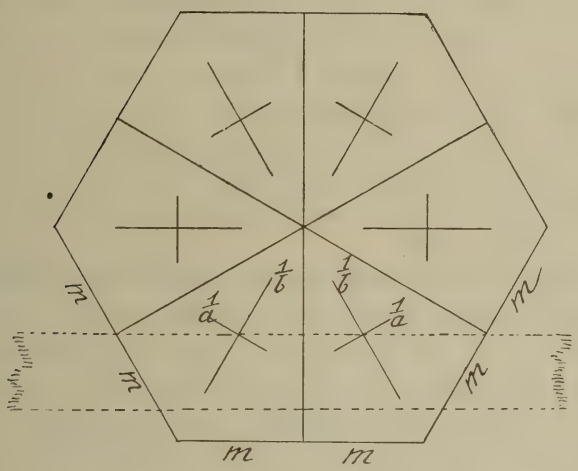


Fig. 3

maclent suivant la loi de Malard. En effet, supposons une telle macle constituée de six éléments (fig. 3). Les axes de l'ellipse de section sont représentés dans chaque élément par $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ et dirigés suivant les diagonales du losange de la face p d'un prisme orthorhombique de 120°.

En supposant qu'une lamelle vienne à se développer dans

un tel système, parallèlement aux faces *m* et de telle sorte qu'elle se limite à la partie représentée par le pointillé de la figure 3, c'est-à-dire aux éléments 3 et 4, nous aurons réalisé la macle telle quelle se présente dans le second type de dulcine.

II. — Saccharine.

La saccharine affecte la forme de petits cristaux blancs, trapus, le plus souvent à contours irréguliers; ils mesurent environ deux dixièmes de millimètre de côté et montrent parfois une tendance à s'allonger suivant une direction qui n'est pas toujours la même; cet allongement n'est d'ailleurs jamais très accentué : il atteint parfois le double de la largeur.

Ce qu'il y a de commun à tous ces cristaux, c'est qu'ils présentent une face d'aplatissement assez marquée qui est toujours la même. C'est au travers de cette face seule qu'ont été faites les recherches optiques que nous allons exposer.

En lumière parallèle et nicols croisés, la teinte de polarisation est presque nulle.

En lumière convergente, on aperçoit excentriquement une branche hyperbolique avec cercles concentriques : un seul axe optique d'un cristal biaxe perce donc excentriquement le champ du microscope. Il en résulte donc que la face d'aplatissement est presque perpendiculaire à un axe optique et que sa teinte basse de polarisation indiquée ci-dessus est due à ce que la section est presque circulaire.

Quoique la plupart des cristaux se présentent, comme il vient d'être dit, avec des contours assez irréguliers, on en trouve cependant qui sont bien formés et qui permettent une détermination plus complète.

Un premier type, représenté par la figure 1, permet de mesurer au microscope les angles de 120° et de 150° tels qu'ils sont renseignés sur la figure.

Il pourrait caractériser la forme orthorhombique pmh^1g^1 par

suite de la valeur des angles indiqués ci-dessus et parce que les extinctions en lumière parallèle se font suivant les diagonales du losange *mm*.

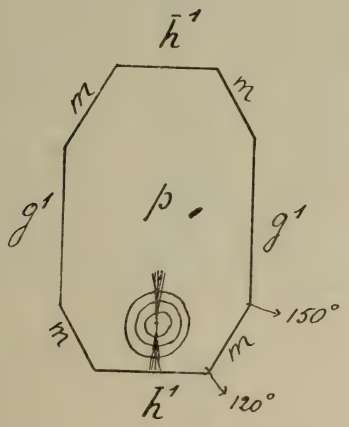


Fig. 1.-

Seulement la figure d'interférence que donne la lumière convergente étant excentrique, la face *p* n'est pas perpendiculaire à un axe d'élasticité. On est donc forcé de ranger le cristal dans le système clinorhombique : lorsqu'en tournant la platine du microscope, on amène en lumière convergente la branche hyperbolique en coïncidence avec la section principale du polariseur, l'axe optique perçant vers le spectateur, on remarque que la face d'aplatissement *p* est perpendiculaire au plan des axes optiques qui est g^1.

Nous adopterons cette notation et cette orientation optique, car elle permet de préciser l'orientation d'autres cristaux qui paraissent très différents de celui que nous venons de voir et qui ne s'en distinguent que par une autre direction l'allongement.

Ainsi le cristal représenté figure 2 présente un allonge-

ment latéral avec un développement irrégulier de certaines faces.

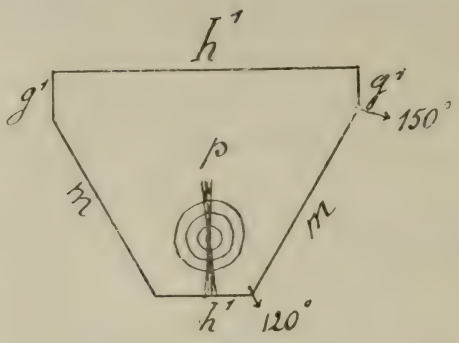


Fig. 2.-

Le cristal figure 3 présente un allongement latéral avec un égal développement des faces de même espèce.

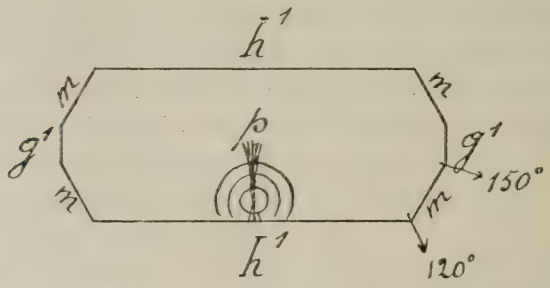


Fig. 3.-

Quant au cristal figure 4, il ne montre aucune tendance à l'allongement.

Le moyen pratique d'orienter ces cristaux est donc de placer

le plan des axes optiques suivant la section principale du polariseur, ce que l'on obtient en faisant coïncider en lumière

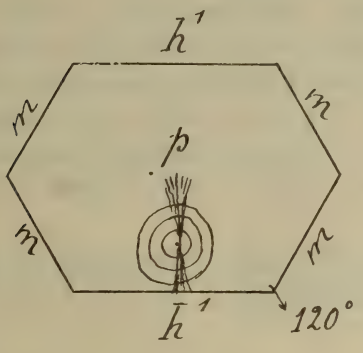


Fig. 4.

convergente la branche hyperbolique avec cette section, la figure excentrique se trouvant vers le spectateur.

C'est cette disposition que nous avons adoptée dans les différents exemples figurés.

***

Recherche de la dulcine et de la saccharine dans la bière. — Le procédé d'extraction employé actuellement donne en fin de compte un résidu éthéré dans lequel on identifie la saccharine et la dulcine par coloration.

Malheureusement cette coloration ne se manifeste pas toujours, surtout pour la dulcine, avec la netteté désirable.

L'emploi des propriétés optiques qui viennent d'être décrites obvie à cet inconvénient et permet d'identifier avec certitude la dulcine et la saccharine.

Pour arriver à un bon résultat, il est toutefois indispensable d'obtenir un résidu éthéré bien cristallisé; dans ce but, la solution éthérée devra être évaporée très lentement de façon que

la cristallisation se fasse dans de bonnes conditions. Une évaporation trop rapide donne un résidu granuleux où l'on n'aperçoit pas de cristaux.

L'identification cristallographique a donné de très bons résultats en opérant sur des échantillons obtenus par l'application des méthodes d'extraction actuellement employées dans les laboratoires. Il reste toutefois à établir d'une façon définitive, au point de vue pratique, les conditions les plus favorables dans lesquelles le résidu doit être obtenu. Il en est de même pour la dulcine.

Les résultats de ces recherches pratiques feront l'objet d'une prochaine communication.

SUR

CERTAINS GROUPES

DE

TROIS CERCLES COAXIAUX

PAR

J. NEUBERG

SUR

CERTAINS GROUPES

DE

TROIS CERCLES COAXIAUX (*)

1. Je me propose de traiter le problème suivant :

Étant donnés, dans un même plan, deux triangles $A_1A_2A_3 \equiv T_a$ *et* $P_1P_2P_3 \equiv T_p$, *on décrit les trois cercles* U_1, U_2, U_3 *qui passent respectivement par un sommet* P_1, P_2, P_2 *de* T_p *et ont pour centre le point de rencontre* S_1, S_2, S_3 *du côté correspondant de* T_a *avec une transversale* s. *Quand ces trois cercles ont-ils deux points communs* N, N′ *ou sont-ils coaxiaux?*

Soient : M_1, M_2, M_3 les milieux des côtés de T_a; H_1, H_2, H_3 les pieds des hauteurs de T_a; L_1, L_2, L_3 les projections de l'orthocentre H sur les côtés du triangle $H_1H_2H_3$; enfin, B_1, B_2, B_3 les sommets du triangle qui a pour côtés les parallèles aux côtés de T_a menées par les sommets opposés.

Plusieurs cas particuliers du problème énoncé ci-dessus sont déjà connus.

a. Le cas de $P_1P_2P_3 \equiv B_1B_2B_3$ se ramène à une proposition classique. En effet, les points de rencontre B_1', B_2', B_3' des droites B_1S_1, B_2S_2, B_3S_3 avec B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 étant colli-

(*) Les Anglais appellent *cercles coaxiaux* (de même axe radical) des cercles appartenant à un même faisceau.

néaires, les cercles U_1, U_2, U_3 ont pour diamètres les diagonales B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3' d'un quadrilatère complet; on sait que ces cercles sont coaxiaux.

b. J'ai traité le cas de $P_1P_2P_3 \equiv A_1A_2A_3$ dans mon *Mémoire sur le tétraèdre* (*) et dans deux articles sur la parabole de Kiepert qui ont paru dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXXIV, et dans les *Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern* (1910); ce dernier recueil (1908) renferme aussi un article de M. Schenker (**) sur la même question.

c. Le cas de $P_1P_2P_3 \equiv M_1M_2M_3$ m'a été communiqué dernièrement par M. Degel, professeur à Bayreuth.

d. M. Schenker a proposé, dans l'*Archiv für Math. und Phys.*, 3e série, t. XV, p. 260, le cas de $P_1P_2P_3 \equiv L_1L_2L_3$, dont une solution analytique par M. Degel paraîtra prochainement.

Dans les cas *a* et *d*, la transversale *s* peut être quelconque; dans les cas *b* et *d*, elle doit toucher la parabole de Kiepert du triangle T_a.

Une correspondance avec MM. Degel et Schenker m'a amené à étudier le problème général.

2. Cette question se ramène à celle-ci : Chercher les points N tels que les médiatrices (***) des droites P_1N, P_2N, P_3N rencontrent respectivement les droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en trois points collinéaires S_1, S_2, S_3.

Pour abréger, posons

$$\begin{array}{lll} A_1N = \rho_1, & A_2N = \rho_2, & A_3N = \rho_3, \\ A_1P_2 = r_{12}, & A_2P_3 = r_{23}, & A_3P_1 = r_{31}, \\ A_1P_3 = r_{13}, & A_2P_1 = r_{21}, & A_3P_2 = r_{32}. \end{array}$$

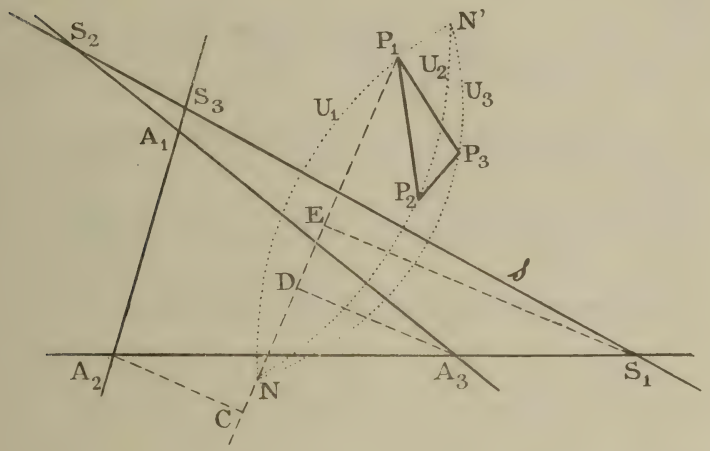
(*) *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1884, pp. 61-72.

(**) Cet article, avec de nouveaux développements, fait partie de la dissertation inaugurale *Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel*, présentée part M. Schenker, en 1911, à Berne et imprimée en 1912.

(***) La *médiatrice* d'un segment de droite est la perpendiculaire élevée au milieu de ce segment.

Les quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont les coordonnées tripolaires du point N, T_a étant le triangle de référence; elles joueront souvent le rôle de coordonnées courantes.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x, y) les coordonnées cartésiennes des points A_1, A_2, A_3, N par rapport à deux diamètres rectangulaires du cercle $A_1A_2A_3$ de centre O et de rayon R.



Le passage aux coordonnées cartésiennes se fait par les formules

$$\rho_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$
$$= (x^2 + y^2 - R^2) - 2(xx_i + yy_i - R^2).$$

Posons encore

$$x^2 + y^2 - R^2 \equiv U, \quad xx_i + yy_i - R^2 \equiv t_i;$$

les équations $U = 0$, $t_i = 0$ représentent respectivement le cercle $A_1A_2A_3$ et sa tangente en A_i. D'après cela

$$(1) \qquad \rho_1^2 = U - 2t_1, \quad \rho_2^2 = U - 2t_2, \quad \rho_3^2 = U - 2t_3.$$

3. Soit maintenant

$$s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 = 0$$

l'équation de la droite s en coordonnées barycentriques (X_1, X_2, X_3) par rapport au triangle T_a, de sorte que

$$\frac{s_2}{s_3} = \frac{S_1A_2}{S_1A_3}, \quad \frac{s_3}{s_1} = \frac{S_2A_3}{S_2A_1}, \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{S_3A_1}{S_3A_2}.$$

Projetons les points A_2, A_3, S_1 en C, D, E sur la droite P_1N; alors

$$\frac{s_2}{s_3} = \frac{S_1A_2}{S_1A_3} = \frac{EC}{ED}.$$

E étant le milieu du côté P_1N des deux triangles A_2P_1N et A_3P_1N, un théorème connu donne

$$\overline{A_2P_1}^2 - \overline{A_2N}^2 = 2P_1N.EC, \quad \overline{A_3P_1}^2 - \overline{A_3N}^2 = 2P_1N.ED.$$

On déduit de là le rapport EC : ED ; par suite

$$(2) \qquad \frac{s_2}{s_3} = \frac{\rho_2^2 - r_{21}^2}{\rho_3^2 - r_{31}^2}, \quad \frac{s_3}{s_1} = \frac{\rho_3^2 - r_{32}^2}{\rho_1^2 - r_{12}^2}, \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1^2 - r_{13}^2}{\rho_2^2 - r_{23}^2}.$$

Si l'on considère les s comme fixes et les ρ comme variables, les équations (2) ont lieu pour un point quelconque de U_1, U_2 ou U_3; ce sont donc les équations de ces cercles.

Introduisons encore les notations

$$(3) \qquad \rho_2^2 - r_{21}^2 \equiv K_{21}, \quad \rho_3^2 - r_{31}^2 \equiv K_{31}, \quad \text{etc.}$$

Les équations $K_{21} = 0$, $K_{31} = 0$ représentent les cercles décrits des points A_2, A_3 comme centres et passant par P_1. L'axe radical des cercles K_{23}, K_{32} (*) a pour équation

$$q_1 \equiv K_{23} - K_{32} \equiv \rho_2^2 - \rho_3^2 - (r_{23}^2 - r_{32}^2) = 0.$$

(*) Suivant un usage reçu, le même symbole désigne à la fois une ligne et le premier membre de son équation.

On a identiquement

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0,$$

et par suite les axes radicaux des couples de cercles K_{23} K_{32}, $K_{31}K_{13}$, $K_{12}K_{21}$ concourent en un même point, si

$$r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2 = r_{21}^2 + r_{32}^2 + r_{13}^2. \tag{4}$$

Soient P'_1, P'_2, P'_3 les projections des points P_1, P_2, P_3 sur les droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; l'égalité (4) se transforme en celle-ci

$$\overline{A_1P'_2}^2 + \overline{A_2P'_3}^2 + \overline{A_3P'_1}^2 = \overline{A_2P'_1}^2 + \overline{A_3P'_2}^2 + \overline{A_1P'_3}^2,$$

qui exprime que les droites $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, $P_3P'_3$ sont concourantes. Par suite, l'égalité (4) a lieu, si les triangles $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ sont orthologiques (*).

Avec les notations (3), les équations (2) des cercles U_1, U_2, U_3 peuvent s'écrire

$$U_1 \equiv \frac{K_{21}}{s_2} - \frac{K_{31}}{s_3} = 0, \quad U_2 \equiv \frac{K_{32}}{s_3} - \frac{K_{12}}{s_1} = 0, \quad U_3 \equiv \frac{K_{13}}{s_1} - \frac{K_{23}}{s_2} = 0 \tag{5}$$

ou encore

$$\begin{cases} U_1 \equiv \dfrac{\rho_2^2}{s_2} - \dfrac{\rho_3^2}{s_3} - \left(\dfrac{r_{21}^2}{s_2} - \dfrac{r_{31}^2}{s_3}\right) = 0, \\ U_2 \equiv \dfrac{\rho_3^2}{s_3} - \dfrac{\rho_1^2}{s_1} - \left(\dfrac{r_{32}^2}{s_3} - \dfrac{r_{12}^2}{s_1}\right) = 0, \\ U_3 \equiv \dfrac{\rho_1^2}{s_1} - \dfrac{\rho_2^2}{s_2} - \left(\dfrac{r_{13}^2}{s_1} - \dfrac{r_{23}^2}{s_2}\right) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

(*) On a donc ce théorème peut-être nouveau : *Soient* $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ *deux triangles tels que les trois perpendiculaires abaissées des sommets de l'un sur les côtés correspondants de l'autre soient concourantes. Les axes radicaux des couples de cercles* (A_1, A_1P_2) et (A_2, A_2P_1), (A_2, A_2P_3) et (A_3, A_3P_2), (A_3, A_3P_1) et (A_1, A_1P_3) *sont concourants.* La notation *cercle* $(0, R)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon R.

Pour que ces cercles soient coaxiaux, il faut et il suffit qu'il existe une relation linéaire entre les premiers membres de leurs équations. Or, on voit immédiatement que

$$U_1 + U_2 + U_3 \equiv 0, \tag{7}$$

pourvu que l'on ait

$$\frac{r_{12}^2 - r_{13}^2}{s_1} + \frac{r_{23}^2 - r_{21}^2}{s_2} + \frac{r_{31}^2 - r_{32}^2}{s_3} = 0. \tag{8}$$

Par conséquent, si l'égalité (8) est vérifiée, les cercles U_1, U_2, U_3 appartiennent à un même faisceau. L'équation du lieu de leurs points communs N, N′ se déduit facilement des équations (5); on trouve

$$K_{21}K_{32}K_{13} = K_{31}K_{12}K_{23} \tag{9}$$

ou

$$(\rho_2^2 - r_{21}^2)(\rho_3^2 - r_{32}^2)(\rho_1^2 - r_{13}^2) = (\rho_3^2 - r_{31}^2)(\rho_1^2 - r_{12}^2)(\rho_2^2 - r_{23}^2). \tag{10}$$

L'axe radical des cercles U_1, U_2, U_3, que nous désignerons par u, a pour équation

$$\frac{U_1}{s_1} + \frac{U_2}{s_2} + \frac{U_3}{s_3} = 0; \tag{11}$$

car, après substitution des valeurs (1) de ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2, les termes en U disparaissent. En se rapportant aux égalités (5), on trouve aussi pour u

$$s_1(K_{23} - K_{32}) + s_2(K_{31} - K_{13}) + s_3(K_{12} - K_{21}) = 0 \tag{12}$$

ou

$$s_1q_1 + s_2q_2 + s_3q_3 = 0. \tag{13}$$

Nous examinerons successivement différentes hypothèses.

4. L'égalité (8) a lieu pour toutes les transversales s du triangle T_a, si

$$r_{12} = r_{13}, \quad r_{23} = r_{21}, \quad r_{31} = r_{32}; \tag{14}$$

l'égalité (9) devient alors une identité. Par conséquent :

Si les sommets du triangle T_a *sont situés sur les médiatrices des côtes correspondants du triangle* T_p, *une transversale quelconque rencontre les côtés de* T_a *en trois points tels que les cercles décrits de ces points comme centres et passant respectivement par* P_1, P_2, P_3 *sont coaxiaux.* En d'autres termes, *tout point* N *du plan* $A_1A_2A_3$ *jouit de la propriété que les médiatrices des droites* P_1N, P_2N, P_3N *rencontrent respectivement* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *en trois points collinéaires.*

L'égalité (4) étant vérifiée, l'*axe radical* u *des cercles* U_1, U_2, U_3, *représenté par l'équation* (13) *passe constamment par l'intersection des axes radicaux* q_1, q_2, q_3 *des couples* $K_{23}K_{32}$, $K_{31}K_{13}$, $K_{12}K_{21}$.

Le cas de $P_1P_2P_3 \equiv L_1L_2L_3$, indiqué par M. Schenker, présente cette particularité que les triangles T_a, T_p sont homothétiques.

5. Si une seule des égalités (14) a lieu, par exemple $r_{12} = r_{13}$, on déduit de (8) et (10) les deux solutions

$$s_1 = 0, \quad \rho_1^2 - r_{12}^2 = 0; \tag{15}$$

$$\begin{cases} s_2(r_{31}^2 - r_{32}^2) + s_3(r_{23}^2 - r_{21}^2) = 0, \\ (\rho_2^2 - r_{21}^2)(\rho_3^2 - r_{32}^2) = (\rho_3^2 - r_{31}^2)(\rho_2^2 - r_{23}^2). \end{cases} \tag{16}$$

La solution (15) donne pour s toutes les droites passant par A_1; alors $S_2 \equiv S_3 \equiv A_1$, et les cercles U_2, U_3 se confondent en un seul de centre A_1 et passant par les deux points P_2, P_3. Ce cercle est le lieu des points correspondants N, N'. L'axe radical u, qui a pour équation $s_2q_2 + s_3q_3 = 0$, passe constamment par le point q_2q_3, qui appartient aussi à la droite P_1P_1', puisque $q_2 + q_3 \equiv \rho_3^2 - \rho_2^2 - (r_{31}^2 - r_{21}^2)$.

La solution (16) donne pour s toutes les droites passant par

le point S_1' de A_2A_3 qui a pour coordonnées barycentriques

$$0, \quad r_{31}^2 - r_{32}^2, \quad r_{23}^2 - r_{21}^2.$$

La seconde des équations (16) est vérifiée par

$$\rho_2 = r_{21}, \quad \rho_3 = r_{31}; \tag{17}$$

$$\rho_2 = r_{23}, \quad \rho_3 = r_{32}. \tag{18}$$

Les égalités (17) donnent $N \equiv P_1$. Pour obtenir la position correspondante de s, menons la médiatrice de la droite P_1P_2 qui coupe A_2A_3 en S_2', et la médiatrice de la droite P_1P_3 qui coupe A_1A_2 en S_3'; la droite $S_2'S_3'$ rencontre A_2A_3 au point S_1', et il est facile de voir qu'elle correspond à trois cercles coaxiaux U_1, U_2, U_3.

Aux égalités (18) correspondent les points d'intersection Z, Z′ des cercles K_{23}, K_{32}; la médiatrice de la droite ZP_1 passe par S_1'; la transversale s est maintenant A_2A_3 (*). La seconde des équations (16) se réduit à

$$\rho_2^2(r_{31}^2 - r_{32}^2) + \rho_3^2(r_{23}^2 - r_{21}^2) = r_{31}^2 r_{23}^2 - r_{21}^2 r_{32}^2;$$

le lieu des points N, N′ est donc la circonférence de centre S_1' et passant par P_1. L'axe radical des cercles U_1, U_2, U_3 passe encore par un point fixe de la droite q_1, c'est ce qu'on voit en éliminant s_3 entre l'équation (15) et la première des équations (16). Les deux points fixes par lesquels passe l'axe radical dans les deux solutions (15) et (16) sont évidemment sur une perpendiculaire à la droite A_1S_1'; ils coïncident lorsque les triangles T_a, T_p sont orthologiques.

6. Supposons maintenant

$$r_{12} = r_{13}, \quad r_{21} = r_{23}, \quad r_{31} \neq r_{32}.$$

(*) Cette interprétation des systèmes d'équations (17) et (18) et de leurs analogues s'appliquera également aux hypothèses des paragraphes qui vont suivre.

L'équation (8) rendue entière est vérifiée par $s_1 = 0$ et par $s_2 = 0$; donc les transversales cherchées s sont les droites menées par A_1 et celles qui passent par A_2. Le lieu des points N, N′ se compose des cercles ayant respectivement pour centres les points A_1, A_2 et passant l'un par P_2 et P_3, l'autre par P_3 et P_1. Les axes radicaux passent par le point commun aux trois droites q_2, q_3, P_1P_1' ou aux trois droites q_3, q_1, P_2P_2'.

7. Si l'on a

$$r_{12} \neq r_{13}, \quad r_{21} \neq r_{23}, \quad r_{31} \neq r_{32},$$

l'équation (8) représente une conique Σ inscrite au triangle T_a; cette courbe est l'enveloppe des droites s auxquelles correspondent trois cercles coaxiaux. Pour abréger, nous appellerons W le lieu des points N, N′.

On a pour Σ une parabole lorsque les triangles T_a, T_p sont orthologiques. En effet, si l'on prend pour s la droite de l'infini, les cercles U_1, U_2, U_3 sont remplacés par les droites (indéfinies) P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3'; donc ces droites doivent concourir en un même point P; ce point fait partie de W. D'ailleurs, pour que les coordonnées (1, 1, 1) de la droite de l'infini vérifient l'équation (8), on doit avoir la relation (4) dont la signification a déjà été indiquée.

Supposons $P_1P_2P_3 \equiv A_1A_2A_3$; alors si a_1, a_2, a_3 désignent les longueurs des côtés de T_a, on a

$$r_{12} = r_{21} = a_3, \quad r_{23} = r_{32} = a_1, \quad r_{31} = r_{13} = a_2,$$

et les équations (8) et (10) deviennent

$$(19) \qquad \frac{a_2^2 - a_3^2}{s_1} + \frac{a_3^2 - a_1^2}{s_2} + \frac{a_1^2 - a_2^2}{s_3} = 0,$$

$$(20) \quad (\rho_2^2 - a_3^2)(\rho_3^2 - a_1^2)(\rho_1^2 - a_2^2) = (\rho_3^2 - a_2^2)(\rho_1^2 - a_3^2)(\rho_2^2 - a_1^2),$$

elles représentent respectivement la parabole de Kiepert et une cubique circulaire. Pour les propriétés de cette cubique, voir les *Mémoires* cités au § 1, b.

8. Examinons le cas de $P_1P_2P_3 \equiv M_1M_2M_3$; alors

$$r_{21} = r_{31} = \frac{1}{2} a_1, \quad r_{32} = r_{12} = \frac{1}{2} a_2, \quad r_{13} = r_{23} = \frac{1}{2} a_3.$$

On trouve pour Σ la parabole de Kiepert, proposition qui m'a été signalée par M. Degel. La courbe W a pour équation

$$K_{23}K_{31}K_{12} = K_{21}K_{32}K_{13}, \tag{21}$$

ou encore

$$\left(\rho_2^2 - \frac{1}{4} a_3^2\right)\left(\rho_3^2 - \frac{1}{4} a_4^2\right)\left(\rho_1^2 - \frac{1}{4} a_2^2\right) = \left(\rho_3^2 - \frac{1}{4} a_2^2\right)\left(\rho_1^2 - \frac{1}{4} a_3^2\right)\left(\rho_2^2 - \frac{1}{4} a_1^2\right). \tag{22}$$

L'équation (21) exprime que *le produit des puissances d'un point de* W *par rapport aux trois cercles décrits des points* A_1, A_2, A_3 *comme centres et passant respectivement par les points* M_2, M_3, M_1 *est égal au produit de ses puissances par rapport aux trois cercles décrits des mêmes centres et passant respectivement par* M_3, M_1, M_2.

L'équation (22) donne immédiatement quelques points de W et conduit à des propositions très curieuses. Elle admet les solutions

$$\rho_2 = \frac{1}{2} a_3, \quad \rho_3 = \frac{1}{2} a_2 ; \tag{23}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2} a_1, \quad \rho_3 = \frac{1}{2} a_1 ; \tag{24}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \tag{25}$$

et d'autres analogues. La solution (23) donne les points d'intersection Z, Z′ des cercles décrits des points A_2, A_3 comme centres et passant respectivement par M_3, M_2; elle correspond à la position A_2A_3 de s. Le centre du cercle passant par les points Z, Z′, M_1 est le point de contact de Σ avec A_2A_3. La solu-

tion (24) indique le point M_1 ; pour obtenir la position correspondante de s, cherchons les points de rencontre de A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 respectivement avec les médiatrices des segments A_1M_1, A_2M_1, A_3M_1 ; ces points sont situés sur une tangente à la parabole de Kiepert. Enfin, la solution (25) montre que le centre O du cercle $A_1A_2A_3$ est situé sur W ; elle correspond à la tangente à l'infini de la parabole de Kiepert.

L'équation (22) admet l'interprétation suivante : *Si l'on porte sur une droite, à partir d'une même origine, six abscisses proportionnelles aux quantités*

$$\rho_1^2, \quad \frac{1}{4}a_1^2, \quad \rho_2^2, \quad \frac{1}{4}a_2^2, \quad \rho_3^2, \quad \frac{1}{4}a_3^2,$$

leurs extrémités sont trois couples d'une même involution.

Cette interprétation suggère d'autres formes de la relation (22), notamment la suivante :

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \rho_1^2 + \frac{1}{4}a_1^2 & a_1^2\rho_1^2 \\ 1 & \rho_2^2 + \frac{1}{4}a_2^2 & a_2^2\rho_2^2 \\ 1 & \rho_3^2 + \frac{1}{4}a_3^2 & a_3^2\rho_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

de laquelle on pourrait également déduire les points déjà connus de W et qui en suggère d'autres.

L'équation (26) admet la solution $a_1\rho_1 = a_2\rho_2 = a_3\rho_3$ qui correspond aux points d'intersection des trois cercles d'Apollonius de T_a, c'est-à-dire aux centres isodynamiques.

La solution

$$\rho_1^2 + \frac{1}{4}a_1^2 = \rho_2^2 + \frac{1}{4}a_2^2 = \rho_3^2 + \frac{1}{4}a_3^2$$

indique le centre du cercle qui coupe aux extrémités de trois diamètres les trois cercles décrits des points A_1, A_2, A_3 comme centres avec les rayons $\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2, \frac{1}{2}a_3$. Ce point, que nous dési-

gnons par ε, est à l'intersection des trois droites représentées par

$$\rho_2^2 - \frac{1}{4}a_3^2 = \rho_3^2 - \frac{1}{4}a_2^2, \quad \rho_3^2 - \frac{1}{4}a_1^2 = \rho_1^2 - \frac{1}{4}a_3^2, \ldots;$$

ces droites sont les axes radicaux des couples $K_{23}K_{32}$, $K_{31}K_{13}$, $K_{12}K_{21}$. Pour les déterminer, mettons la première équation sous la forme

$$\rho_2^2 - \rho_3^2 = \frac{1}{4}(a_3^2 - a_2^2)$$

et observons qu'elle donne successivement, V désignant la projection de ε sur A_2A_3,

$$\overline{A_2V}^2 - \overline{A_3V}^2 = \frac{1}{4}\left(\overline{A_2H_1}^2 - \overline{A_3H_1}^2\right),$$

$$2A_2A_3 \cdot M_1V = \frac{1}{4} \cdot 2A_2A_3 \cdot M_1H_1, \quad M_1V = \frac{1}{4}M_1H_1.$$

Par suite, la droite $V\varepsilon$ divisant la droite OH dans le rapport $1:3$ passe au milieu de la distance entre l'orthocentre O du triangle $M_1M_2M_3$ et le centre du cercle $M_1M_2M_3$. Il en résulte que ε est le centre du cercle des neuf points du triangle $M_1M_2M_3$.

Si, dans l'équation (26), on remplace ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2 par les valeurs (1), on la ramène facilement à la forme

$$\left| 1 \; t_1 \; a_1^2 \right| U - 2 \left| 1 \; t_1 \; a_1^2 t_1 \right| + \frac{1}{4} \left| 1 \; a_1^2 \; a_1^2 t_1 \right| = 0,$$

les déterminants étant dénotés par leur première ligne.

La courbe W est donc une cubique circulaire.

Dans le cas actuel, on a

$$q_1 \equiv K_{23} - K_{32} = \rho_2^2 - \rho_3^2 - \frac{1}{4}(a_2^2 - a_3^2), \ldots;$$

par conséquent, l'équation (13) de l'axe radical des cercles U_1, U_2, U_3 devient

$$\Sigma(s_2 - s_3)\left(\rho_1^2 + \frac{1}{4}a_1^2\right) = 0.$$

D'où l'on conclut que cet axe passe constamment par le point ε.

9. Plus généralement, la courbe Σ est une parabole, lorsque les points P_1, P_2, P_3 sont situés respectivement sur les médiatrices M_1O, M_2O, M_3O des côtés du triangle $A_1A_2A_3$ (*); car la droite de l'infini considérée comme une position de s donne pour les cercles U_1, U_2, U_3 ces trois médiatrices et pour N le point O. D'ailleurs, comme on a

$$r_{21} = r_{31} = \alpha_1, \quad r_{32} = r_{12} = \alpha_2, \quad r_{13} = r_{23} = \alpha_3,$$

α_1, α_2, α_3 étant trois longueurs qu'on peut prendre arbitrairement, l'équation (2) se change en

$$\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{s_1} + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1^2}{s_2} + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{s_3} = 0,$$

et représente une parabole touchant les trois côtés de T_a et la droite

$$\frac{X_1}{\alpha_1^2} + \frac{X_2}{\alpha_2^2} + \frac{X_3}{\alpha_3^2} = 0.$$

Le lieu des points N, N′ a pour équation

$$(\rho_1^2 - \alpha_2^2)(\rho_2^2 - \alpha_3^2)(\rho_3^2 - \alpha_1^2) = (\rho_1^2 - \alpha_3^2)(\rho_2^2 - \alpha_1^2)(\rho_3^2 - \alpha_2^2),$$

(*) Si l'on renverse les rôles des $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$, on retombe sur le cas considéré au § 3.

ou encore

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1^2 + \alpha_1^2 & \alpha_1^2\rho_1^2 \\ 1 & \rho_2^2 + \alpha_2^2 & \alpha_2^2\rho_2^2 \\ 1 & \rho_3^2 + \alpha_3^2 & \alpha_3^2\rho_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe W passe par le point O et par le point défini par les égalités

$$\rho_1^2 + \alpha_1^2 = \rho^2 + \alpha_2^2 = \rho_3^2 + \alpha_3^2;$$

ce dernier point est le centre η du cercle qui coupe aux extrémités de trois diamètres les trois cercles décrits des points A_1, A_2, A_3 avec les rayons α_1, α_2, α_3. Ce centre est à l'intersection des axes radicaux des couples $K_{23}K_{32}$, $K_{31}K_{13}$, $K_{12}K_{21}$ comprenant deux des cercles U_1, U_2, U_3 qui correspondent à la transversale s confondue avec un côté du triangle T_a. L'axe radical d'un triple quelconque $U_1U_2U_3$ passe par η.

10. Pour terminer ces développements, considérons deux triangles quelconques T_a et T_p. Les transversales s auxquelles correspondent trois cercles coaxiaux U_1, U_2, U_3 enveloppent une conique centrée Σ, représentée par l'équation (8) que, pour abréger, nous écrirons ainsi

$$\frac{\mu_1}{s_1} + \frac{\mu_2}{s_2} + \frac{\mu_3}{s_3} = 0. \tag{27}$$

Les points N, N′ ont pour lieu géométrique une quartique circulaire W représentée par l'équation (10), qui, après substitution des valeurs (1), prend la forme

$$AU^2 + BU + C = 0;$$

A est une constante différente de zéro, B et C sont des fonctions du second degré de t_1, t_2, t_3.

L'axe radical u des cercles U_1, U_2, U_3 a pour équation

$$s_1q_1 + s_2q_2 + s_3q_3 = 0; \tag{28}$$

où $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$ sont les équations des axes radicaux des couples $K_{23}K_{32}$, $K_{31}K_{13}$, $K_{12}K_{21}$; ces axes ne sont pas concourants.

On peut déterminer facilement quelques éléments des courbes Σ et W. Les côtés du triangle T_a sont tangents à la conique Σ. Par exemple, si l'on fait coïncider s avec A_2A_3, on a $S_2 \equiv A_3$, $S_3 \equiv A_2$; les cercles U_2 et U_3, qui deviennent K_{32} et K_{23}, se coupent en deux points Z, Z'; on prendra pour S_1 le centre du cercle passant par les trois points Z, Z', P_1, et ce centre sera le point de contact de A_2A_3 avec Σ. On obtient de cette manière pour W les six points d'intersection des couples $K_{32}K_{23}$, $K_{13}K_{31}$, $K_{21}K_{12}$.

La courbe W passe par les points P_1, P_2, P_3. Par exemple, les médiatrices des droites P_1P_2, P_2P_3 rencontrent respectivement A_1A_3, A_1A_2 en des points S_2', S_3' et la droite $S_2'S_3'$ coupe A_2A_3 en un point S_1'; les points S_1', S_2', S_3' sont situés sur une même tangente à Σ, et les cercles correspondants U_1, U_2, U_3 ont en commun le point P_1.

L'axe radical u du triple $U_1U_2U_3$ enveloppe une conique tangente aux trois droites q_1, q_2, q_3. En effet, si l'on considère q_1, q_2, q_3 comme des coordonnées ponctuelles par rapport au triangle $q_1q_2q_3$ et s_1, s_2, s_3 comme des coordonnées tangentielles par rapport au même triangle, l'équation (24) représente l'enveloppe de u en coordonnées tangentielles; l'équation ponctuelle correspondante est

$$\sqrt{\mu_1 q_1} + \sqrt{\mu_2 q_2} + \sqrt{\mu_3 q_3} = 0.$$

OBSERVATION

SUR

LE PROBLÈME DE LA DIVISION D'UN HÉMISPHÈRE

EN DEUX PARTIES ÉQUIVALENTES

PAR

UN PLAN PARALLÈLE À SA BASE

PAR

G. CESÀRO

Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur de cristallographie à l'Université de Liége

OBSERVATION

SUR

LE PROBLÈME DE LA DIVISION D'UN HÉMISPHÈRE

EN DEUX PARTIES ÉQUIVALENTES

PAR

UN PLAN PARALLÈLE A SA BASE

Je ne sais si l'on a observé que la division d'un hémisphère en deux parties équivalentes, par un plan parallèle à sa base, revient à diviser en trois parties égales l'arc de 30°.

En effet, si x est le segment que le plan inconnu coupe sur la hauteur de l'hémisphère, à partir du centre, l'équation à résoudre est

$$x^3 - 3R^2x + R^3 = 0,$$

R étant le rayon de la sphère; or, en posant

$$x = 2R \sin \varphi,$$

cette équation devient

$$3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi = \frac{1}{2},$$

ou

$$\sin 3\varphi = \frac{1}{2}.$$

On en déduit :

$$3\varphi = 30^\circ \quad \text{et} \quad \varphi = 10^\circ \text{ (*)}.$$

* * *

Plus généralement : Sectionner une sphère par un plan, de manière que le segment enlevé soit la $n^{ième}$ partie de la sphère, revient à diviser en trois parties égales l'arc qui a pour sinus : $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Effectivement, si x est la distance du plan inconnu au centre de la sphère, l'équation à résoudre est

$$(R - x)^2 (2R + x) = \frac{4}{n} R^3.$$

Or, si l'on prend encore comme inconnue le rapport de x au *diamètre* de la sphère, en posant

$$x = 2R \sin \varphi,$$

l'équation devient

$$\sin 3\varphi = 1 - \frac{2}{n}.$$

Donc

$$x = 2R \sin \left\{ \frac{1}{3} \arcsin \left(1 - \frac{2}{n} \right) \right\}$$

ou bien

$$x = 2R \sin \left(30^\circ - \frac{2}{3} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Pour $n = 4$, on retrouve le résultat obtenu dans le paragraphe précédent.

(*) $x = 2R \sin 10^\circ = 0{,}3473\ R$.

* * *

Si l'on considère deux plans parallèles voisins enlevant l'un la $n^{ième}$ partie du volume, l'autre la $n^{ième}$ partie de la surface de la sphère, ces plans ne coïncident que dans les positions extrêmes : $n = 2$, plans passant par le centre de la sphère; $n = \infty$, plans tangents à la sphère. Si l'on fait varier n depuis 2 jusqu'à ∞, ces plans, d'abord en coïncidence, se séparent, et si x et y représentent leurs distances respectives au centre de la sphère, la distance $y - x$ de ces plans, toujours positive (*), va d'abord en augmentant, atteint un maximum, puis décroît de nouveau jusqu'à zéro. Ce maximum se détermine facilement en conservant la variable auxiliaire φ employée ci-dessus : comme

$$y = R \sin 3\varphi,$$

on a

$$y - x = R \sin \varphi (1 - 4 \sin^2 \varphi) \ (^*);$$

le maximum de cette distance correspond à

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad \sin 3\varphi = \frac{4}{3\sqrt{3}};$$

on en déduit

$$\frac{1}{n} = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{18} = 0{,}1150998 \ (^{**}).$$

(*) Cette valeur est positive, car de

$$2 < n < \infty,$$

on déduit

$$0^\circ < \varphi < 30^\circ.$$

(**) Dans cette position, le segment enlevé est donc approximativement $\frac{1}{9}$ de la sphère.

Les valeurs de x et y correspondant à l'écartement maximum sont

$$x = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}};$$

la distance maxima est donc

$$y - x = \frac{R}{3\sqrt{3}} = 0{,}1924501\ R.$$

On peut observer que la position où les plans enlevant, l'un le *nième* du volume, l'autre le *nième* de la surface de la sphère, se trouvent à la distance maxima, peut être obtenue à l'aide de la règle et du compas.

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

DANS LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A

PARAMÈTRE VARIABLE

PAR

Paul NOAILLON

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

ERRATA ET ADDENDA

ERRATA

N. B. — La notation : page 17,095 signifie page 17 à 9,5 centimètres en dessous de la première ligne imprimée (généralement le numéro de la page).

Page.	*Dans le signe :*	*Remplacez :*
17,17	⫩	La barre | par une courbe (
20,07	»	»
,105	»	»
,12	»	»
21,015	»	»
,02	»	»
,025	»	»
,05	»	»
,10	»	»
151,07	»	»
,09	»	»
,10	»	»
179,065	»	»
198,065	»	»
20,14	⫩ ⫩	La première barre | par une courbe) et la deuxième barre | par une courbe (
,165	»	»

Page.	*Dans le signe :*	*Remplacez :*
76,115	$\pm\pm$	les barres ‖ par deux courbes)(
84,045	»	»
198,07	»	»

	Dans l'expression :	*Barrez ostensiblement :*
115,055	$\dfrac{\Sigma_r \overline{00}.\,Y_r.\,W(Y_1Y_2\ldots Y_r\ldots Y_{n+1})}{W(Y_1Y_2\ldots Y_r\ldots Y_{n+1})}$	Y_r dans $W(Y_1Y_2\ldots Y_r\ldots Y_{n+1})$ *au numérateur.*
145,07	$\left[\dfrac{W(Y_1\ldots Y_r\ldots Y_n)}{Y_1\ldots Y_r\ldots Y_n}\right]$	Y_r au numérateur et au dénominateur de ce premier facteur entre [ ].
146,05	$\left[\dfrac{W(Z_1\ldots Z_r\ldots Z_n)}{Z_1\ldots Z_r\ldots Z_n}\right]$	Z_r au numérateur et au dénominateur de ce premier facteur entre [ ].
,09	$\dfrac{W(Z_1\ldots Z_r\ldots Z_n)}{W(Z_1\ldots Z_r\ldots Z_n)}$	Z_r *au numérateur.*
,125	$\dfrac{W(V_1\ldots V_r\ldots V_n)}{W(V_1\ldots V_r\ldots V_n)}$	V_r *au numérateur.*
150,04	$W_r = T_1\ldots T_r\ldots T_n\,.\,\overline{\alpha}$	T_r.
,065	$W_0 = T_1\ldots T_0\ldots T_n\,.\,\overline{\alpha}$	T_0.

	Au lieu de :	*Lisez :*
8,065	$P_0P_1\ldots P_m$	$P_0P_1\ldots P_n$
18,145	$3+5\theta$	$3+5\overline{\theta}$
22,03	classe $\overline{A_1}$	classe $\overline{A}$
35,17	$M = e^{x^2-x}$	$M = e^{x^2z^2-xz}$
38,03	$j > J(n)$	$j \geqq J(n)$
,065	»	»
,055	non décroissante quand n croît.	croissant avec n jusqu'à l'∞.
39,06	au n° 57.	aux n^{os} 57 et 58.
44,16	$X^{\overline{n-1}}$	$x^{\overline{n-1}}$
47,06	polygone.	polynome.
50,072	A^{q_1}	A^{q_1}
,078	A^{q_2}	A^{q_2}
70,055	capitale.	radicale.

Page.	*Au lieu de :*	*Lisez :*
70,075	numéros 70 et suivants.	numéros 71 et suivants.
71,078	capitale.	radicale.
,095	»	»
75,05	les γ sont réels et décroissants.	$\gamma_1\gamma_2$ ... sont des constantes réelles, de plus en plus petites.
79,025	polynome.	polygone.
87,098	(F_2D).	$(\mathcal{F}_2D)$.
94,01	$\overline{P(X)}$.	$\overline{\mathcal{P}(X)}$.
105,065	(d'après le n° ... par s^o).	Supprimez toute cette parenthèse.
,145	cela résulte *d'ailleurs* directement.	cela résulte directement.
,145	donc $s^o = u + \frac{\overline{\lambda}.\overline{1}}{X}$.	Supprimez ces mots.
,16	B_0 est de la classe a.	B_0 est de la classe $\overline{a}$.
111,085	$TY_1 = \overline{00}\,.\,T_1$	$Y_1 = \overline{00}\,.\,T_1$.
112,10	$\theta_2 = \theta_3 = .. = \theta_a$	$\theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_a = 1$.
113,025	(après avoir remplacé ... ... parce que $u_1 \neq \overline{00}$).	Supprimez toute cette parenthèse.
,11	puisque l'on n'a pas $u_1 = \overline{00}$.	en multipliant les deux membres par u_1^{b-a+1}.
115,12	$\overline{P(x)}$	$\overline{\mathcal{P}(X)}$
117,05	(*)	c'est-à-dire telle que $W(Y, Y_0) \neq \overline{00}$
117,075	$\overline{P(x)}$	$\overline{\mathcal{P}(X)}$
,145	»	»
118,045	$z = z_1$	$z = z_0 = z_1$
119,16	on a	on a, à cause de (2),
,17	$\frac{T}{\overline{T}}$	$\frac{T}{\overline{T_0}}$
120,02	$z = z_0$	$z = z_0 = z_1$
126,13	premier nombre.	premier membre.
127,057	»	»

Page.	*Au lieu de :*	*Lisez :*
128,012	seront encore compris.	seront compris.
133,105	$P_0 \neq 0$	$P_0 \neq \overline{00}$
139,06	$\left\{ \frac{v_1}{W_1} c_1 + \cdots \right\}$	$\left\{ \frac{v_1}{W_1} C_1 + \cdots \right\}$
,105	»	»
,125	En vertu de (8)	En vertu de (8) et (11)
,16	$W(V_1 \ldots V_n) \neq 0$	$W(V_1 \ldots V_n) \neq \overline{00}$
155,14	$\frac{1}{x^N}$	$\frac{\overline{1(x, z)}}{x^N}$
166,095	(*)	Transportez ce signe après 166,125
,125	»	» »
174,155	$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{n+1}$	$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{n-1}$
177,11	Or on a	Or, par le n° 49 (avec addendum) cette relation résulte de
. . . .	. . . . .	$\frac{y}{T_n} = \frac{Y}{T_n} + \overline{00}$ (9)
. . . .	. . . . . on obtient enfin	et de
178,03	$\frac{T_n}{Y} - \frac{T_n}{y} = \overline{00}$	$\frac{T_n}{Y} = \overline{\mathfrak{L}(x)}$ (6ter)
194,17	$\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(x+1)}$	$\frac{1}{v(x) \cdot v(x+1)}$

ADDENDA

N°	Page :	Après :	Ajoutez :
31	25,115		Les trois premières notations sont du n° 2. La notation $\overline{\infty}$ représente, conformément au n° 6, tout ce qui n'est pas ∞.
34	26,045	$\alpha = \beta + m\overline{n}$	ou $\alpha = \beta + \overline{00}$
42	30,08		Notation du n° 28 : $\overline{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}$ représente toute fonction qui tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.
43	30,11		Notation du n° 29.
47	32,06	... prises par rapport à z.	et où de plus les parties réelles des exposants α sont toutes inférieures à un même nombre fixe.
49	33,03	... y sera aussi	, et ces deux inverses seront asymptotiquement égales.
49	33,155		Les deux fonctions inverses $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{g}$ seront asymptotiquement égales, car on a $\frac{1}{f} - \frac{1}{g} = (g - f) \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g} = \overline{00} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{00}$
60	38,105		Parce que $J(n)$ est une fonction croissante, la relation $K \geqq n$ sera équivalente à $J(K) \geqq J(n)$ donc, par (4), elle sera équivalente à la condition $j \geqq J(n)$ du n° 57.

N°	Page :	Après :	Ajoutez :
62	40,005	pour $j > j_0$	et $\geqq J\,n$).
63	40,135	Et l'on a ainsi	, pour $j > j_0$. (Quant à la condition $j \geqq J(n)$, elle est équivalente, d'après l'addendum au n° 60, à $n \leqq K$. Elle est donc satisfaite, puisque $n = K$.)
64	41,10		ainsi que leurs dérivées successives par rapport à z.
78	50,135	$f_1 \leqq n$	(Voir relation (9) du n° 88.)
136	81,085	d'après le n° 87.	Au n° 87, en posant $\Phi = x^{\alpha_1} t$, nous avons obtenu l'identité $$F\Phi = K\,.\left\{ G_1(t) + \frac{1}{x_1} H_1(t) \right\} \quad (12^{bis})$$ où K est une certaine puissance de x. Cette identité est due aux relations : $\Phi = x^{\alpha_1} t$, $\Phi^2 = x^{2\alpha_1} t^2$, ... $\Phi^n = x^{n\alpha_1} t^n$ (12^{ter}) Or, si l'on remplace les lettres Φ et t respectivement par D et δ (qui représentent des opérateurs), les relations (12^{ter}) subsistent sous la forme $D = x^{\alpha_1}\delta$, $D^2 = x^{2\alpha_1}\delta^2$, ... $D^n = x^{n\alpha_1}\delta^n$ Donc l'identité (12^{bis}) subsistera sous la forme (12).
185	113 02		En multipliant les deux membres par u_1^a, on obtient $$Y_1^a \,.\, W\left[D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), \ldots \right] = \overline{00}\,.\,T_1\,.\,T_2\,.\,T_3 \ldots T_a$$
192	117,045	radicale φ_0	et telle que $$Y_0 = T_0\,.\,u_0$$ où $$T_0 = e^{\int_{z_0}^{z} \varphi_0 dz}$$ $$u_0 = a_0 + \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \ldots + \frac{a_j}{X^j} + \overline{00}$$ avec $$|a_0| > \text{nombre positif fixe}$$ (quand z varie dans l'intervalle $\overline{z_1 z_2}$). Pour réaliser cette dernière condition, on

N°	Page :	Après :	Ajoutez :
			fractionnera éventuellement l'intervalle $\overline{z_1 z_2}$ et l'on choisira convenablement Y_0 dans chaque intervalle partiel. Le théorème du n° 188, vrai pour chacun de ces intervalles partiels, sera vrai pour l'intervalle total.
201	125,125	$u_0 = \overline{(\mathcal{L}x)}$	On a aussi $$\frac{1}{u_0} = \overline{\mathcal{L}(x)}$$ en vertu de l'addendum au n° 192.
202	127,018	ils sont finis	en vertu de l'addendum au n° 192.
215	137,14		D'une manière plus précise, nous voulons dire qu'on pourra trouver un nombre fixe $$M = \overline{I(z, x, j)}$$ tel que l'on ait (pour x, j suffisamment grands) : $$v_1 = \overline{\lambda} \cdot M, \quad v_2 = \overline{\lambda} \cdot M, \ldots v_n = \overline{\lambda} \cdot M$$
216	137,16		Ces solutions formelles seront choisies de telle sorte que, non seulement $$\frac{Y_r}{T_r} = \overline{\mathcal{L}(x)}$$ mais encore $$\frac{T_r}{Y_r} = \overline{\mathcal{L}(x)}$$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ Pour établir que cela est possible, il suffit de remplacer l'indice n par l'indice r dans le raisonnement des n^{os} 273 à 279 (avec addendum au n° 279).
255	164,025	$z = z_2$	Nous disons bien $z = z_2$ et non pas $z = z_1$.
256	164,085	et	, comme en vertu du n° 49 (complété par addendum) la relation $$\frac{y}{T_n} = \frac{Y}{T_n} + \overline{00} \qquad (9)$$ jointe à $$\frac{T_n}{Y} = \overline{(\mathcal{L}x)} \qquad (6^{ter})$$

N°	Page :	Après :	Ajoutez :

entraîne

$$\frac{T_n}{y} = \frac{T_n}{Y} + \overline{00}$$

ou

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{Y} + \frac{1}{T_n} \cdot \overline{00}$$

on aura, par (6ter),

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{T_n} \cdot \overline{\varphi(x)} \qquad (9^{ter})$$

279 171,115

m étant la multiplicité de T_n, il est possible de construire un système de m facteurs secondaires.

$$u'_1,\ u'_2,\ \dots\ u'_k,\ \dots\ u'_m$$

dont les m génératrices

$$[u'_k] = t_k^{(0)} + \frac{t_k^{(1)}}{X} + \frac{t_k^{(2)}}{X_2} + \dots\dots$$

$(k = 1, 2, \dots m)$

soient linéairement et uniformément indépendantes, et telles que les modules des premiers termes

$$|t_1^0|,\ |t_2^0|,\ \dots\ |t_k^0|,\ \dots\ |t_m^0|$$

restent tous $\geqq h$ quand z parcourt $\overline{z_1 z_2}$

Il suffira, en effet, de prendre

$$u'_1 = u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m$$

et, pour $k = 2, 3, \dots m$,

$$u'_k = 2u + \frac{h}{g}\, u_k$$

g étant un nombre fixe $\geqq$ modules de

$$s_2^{(0)},\ s_3^{(0)},\ \dots\ s_k^{(0)},\ \dots\ s_m^{(0)}$$

quand z parcourt $\overline{z_1 z_2}$.

SUR LES ÉQUICENTRES

DE

DEUX SYSTÈMES DE n POINTS

PAR

J. NEUBERG

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

SUR LES ÉQUICENTRES

DE

DEUX SYSTÈMES DE n POINTS

Pour abréger le discours, appelons *équicentre* de deux systèmes de n points $A_1A_2 \dots A_n$, $A'_1A'_2 \dots A'_n$ tout point qui est centre de gravité des mêmes masses $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ attachées respectivement aux points $A_1, A_2, \dots A_n$ ou aux points $A'_1, A'_2, \dots A'_n$.

La présente note s'occupe des cas de $n = 3, 4, 5$. Le cas de $n = 3$ s'est déjà rencontré dans plusieurs questions de géométrie récente du triangle (*), mais n'a pas été discuté complètement.

1. Soient $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ deux triangles coplanaires. Si l'on désigne par (x_r, y_r), (x'_r, y'_r), (x, y) les coordonnées des points A_r, A'_r et d'un équicentre M de ces triangles, par rapport à deux axes quelconques Ox et Oy, on a les égalités

$$x = \frac{\Sigma\mu_1 x_1}{\Sigma\mu_1} = \frac{\Sigma\mu_1 x'_1}{\Sigma\mu_1}, \qquad y = \frac{\Sigma\mu_1 y_1}{\Sigma\mu_1} = \frac{\Sigma\mu_1 y'_1}{\Sigma\mu_1}, \tag{1}$$

(*) Voir, par exemple, nos mémoires :

Sur les projections et contreprojections d'un triangle fixe... (*Mém. cour. et autres Mém. publiés par l'Acad royale de Belgique*, t. XLIV, 1890) ; Sur les cercles podaires (*Bull. de l'Acad royale de Belgique*, 1910) ; Sur une transformation par affinité (*Ann. de la Soc. scientifique de Bruxelles*, t. XXXVII, 1912-1913).

le signe sommatoire s'étendant aux trois indices 1, 2, 3, et la somme $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ étant supposée différente de zéro.

Posons $x'_r - x_r = \alpha_r$, $y'_r - y_r = \beta_r$; α_r et β_r sont les coordonnées de l'extrémité du rayon vecteur ON_r parallèle au vecteur $A_rA'_r$. Le système des quatre équations (1) à quatre inconnues x, y, $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ est équivalent au suivant

$$\Sigma\mu_1\alpha_1 = 0, \qquad \Sigma\mu_1\beta_1 = 0, \tag{2}$$

$$x = \frac{\Sigma\mu_1 x_1}{\Sigma\mu_1}, \qquad y = \frac{\Sigma\mu_1 y_1}{\Sigma\mu_1}. \tag{3}$$

Si les équations (2) sont distinctes, on en tire

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right\| \text{(*)};$$

donc les masses μ_1, μ_2, μ_3 sont proportionnelles aux aires des triangles ON_2N_3, ON_3N_1, ON_1N_2. En d'autres termes, *deux triangles coplanaires* $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ *ont en général un seul équicentre M, dont les coordonnées barycentriques par rapport à l'un ou l'autre de ces triangles sont égales à celles du point O par rapport au triangle* $N_1N_2N_3$.

La construction suivante de l'équicentre m'a été communiquée par M. Sollertinsky :

Par chaque sommet de l'un des triangles $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ *on mène une parallèle au côté opposé; on obtient ainsi leurs triangles anticomplémentaires* $B_1B_2B_3$, $B'_1B'_2B'_3$. *Soient* C_1, C_2, C_3 *les points d'intersection des côtés homologues des triangles donnés, et* D_1, D_2, D_3 *ceux des côtés homologues des triangles* $B_1B_2B_3$, $B'_1B'_2B'_3$. *Les droites* C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 *passent par l'équicentre.*

(*) J'emploie ici une notation usitée pour indiquer la solution d'un système de n équations linéaires homogènes à $n + 1$ inconnues : les inconnues prises alternativement avec les signes + ou — sont proportionnelles aux déterminants qu'on déduit de la matrice des coefficients de ces équations en supprimant la première colonne, ou la deuxième, etc.

Le quadrangle $ON_1N_2N_3$ ne change pas de forme si les droites A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' tournent d'un même angle autour des points A_1, A_2, A_3 ou sont multipliées par un même nombre. Il en résulte que dans trois figures directement semblables, tous les triples de points homologues ont le même centre de gravité quand on charge ces points de certaines masses μ_1, μ_2, μ_3.

2. Les équations (2) sont identiques, si

$$\frac{y_1 - y_1'}{x_1 - x_1'} = \frac{y_2 - y_2'}{x_2 - x_2'} = \frac{y_3 - y_3'}{x_3 - x_3'};$$

les droites A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' sont alors parallèles, et les points O, N_1, N_2, N_3 sont collinéaires.

Le système (1) ne comprend plus que trois équations distinctes, qu'on peut écrire ainsi :

$$\Sigma\mu_1(x - x_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1(y - y_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1\alpha_1 = 0;$$

en éliminant μ_1, μ_2, μ_3, on obtient l'équation du premier degré en x et y

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (*).$$

Par conséquent, *si les sommets de deux triangles* $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ *sont situés sur trois parallèles* A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', *ces triangles ont une infinité d'équicentres situés sur une même droite.* Cette droite est l'axe d'homologie de ces triangles; car le point de rencontre de deux côtés homologues est un équicentre pour trois masses dont l'une est nulle (**).

(*) Pour abréger, nous n'écrirons que la première ligne d'un déterminant quand elle suffit pour faire connaître les autres.

(**) Si les droites A_1A_1', A_2A_2' seules sont parallèles, les triangles ont un seul équicentre situé à l'intersection des droites A_1A_2, $A_1'A_2'$; la masse $\mu_3 = 0$.

3. Si $\Sigma\mu_1 \neq 0$, le centre de gravité M des points A_1, A_2, A_3 chargés des masses μ_1, μ_2, μ_3 jouit des propriétés suivantes : Les droites A_1M, A_2M, A_3M rencontrent les droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en des points E_1, E_2, E_3 satisfaisant aux égalités

$$\frac{A_2E_1}{E_1A_3} = \frac{\mu_3}{\mu_2}, \quad \frac{A_3E_2}{E_2A_1} = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \frac{A_1E_3}{E_3A_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \tag{4}$$

de plus

$$\frac{E_1M}{E_1A_1} = \frac{\mu_1}{\Sigma\mu_1}, \quad \frac{E_2M}{E_2A_2} = \frac{\mu_2}{\Sigma\mu_1}, \quad \frac{E_3M}{E_3A_3} = \frac{\mu_3}{\Sigma\mu_1}. \tag{5}$$

Supposons $\Sigma\mu_1 = 0$, et déterminons encore sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ les points E_1, E_2, E_3 d'après les égalités (4). Il est facile de voir que les droites A_1E_1, A_2E_3, A_3E_3 sont parallèles; nous dirons maintenant que les masses μ_1, μ_2, μ_3 ont un centre de gravité M à l'infini dans la direction de ces parallèles; d'ailleurs les relations (5) rejettent également le point M à l'infini.

Le coefficient angulaire de la droite A_1E_1, dans l'hypothèse $\Sigma\mu_1 = 0$, a pour expression

$$\frac{y_1 - \dfrac{\mu_2 y_2 + \mu_3 y_3}{\mu_2 + \mu_3}}{x_1 - \dfrac{\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_2 + \mu_3}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3}{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3};$$

on peut donc dire qu'il est égal au rapport $\frac{y}{x}$ déduit des égalités (3), abstraction faite de la relation $\Sigma\mu_1 = 0$, ou aussi que les coordonnées cartésiennes homogènes du point M sont $\Sigma\mu_1 x_1$, $\Sigma\mu_1 y_1$, 0.

Nous admettons que deux triangles $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ ont un équicentre à l'infini pour des masses μ_1, μ_2, μ_3 dont la somme est nulle, si les droites A_1E_1, $A_1'E_1'$ qui divisent les droites A_2A_3, $A_2'A_3'$ dans le rapport $\mu_3 : \mu_2$ sont parallèles entre elles.

En admettant pour un moment que les quantités μ_1, μ_2, μ_3 vérifient les trois équations

$$\Sigma\mu_1\alpha_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1\beta_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1 = 0,$$

et qu'on élimine μ_1, μ_2, μ_3, on trouve

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

donc les extrémités des vecteurs ON_1, ON_2, ON_3 équipollents aux vecteurs A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' sont maintenant en ligne droite. Cependant les masses μ_1, μ_2, μ_3 ne sont plus proportionnelles aux aires ON_2N_3, ON_3N_1, ON_1N_2.

On doit avoir maintenant, λ désignant le coefficient angulaire de la droite A_1E_1 :

$$\lambda = \frac{\Sigma\mu_1 y_1}{\Sigma\mu_1 x_1} = \frac{\Sigma\mu_1 y_1'}{\Sigma\mu_1 x_1'}, \tag{6}$$

ou

$$\Sigma\mu_1(y_1 - \lambda x_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1(y_1' - \lambda x_1') = 0.$$

En éliminant μ_1, μ_2, μ_3 entre ces équations et la relation $\Sigma\mu_1 = 0$, on obtient

$$\begin{vmatrix} y_1 - \lambda x_1 & y_1' - \lambda x_1' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Donc les triangles proposés admettent deux équicentres à l'infini; ces points peuvent être réels et distincts ou confondus ou imaginaires. Les masses μ_1, μ_2, μ_3 sont proportionnelles aux mineurs relatifs à la troisième colonne du déterminant (7).

Pour construire ces équicentres, imprimons au triangle $A_1'A_2'A_3'$ une translation parallèle qui amène A_1' en A_1; alors les droites A_1E_1, $A_1'E_1'$ coïncideront. Or, les droites qui divisent les droites A_2A_3, $A_2'A_3'$ en parties proportionnelles, enveloppent la parabole qui touche les quatre droites A_2A_3, $A_2'A_3'$, A_2A_2', A_3A_3'. Par suite la droite A_1E_1 est l'une des tangentes menées par A_1 à cette parabole.

On pourrait remplacer les équations (6) par les suivantes :

$$\Sigma\mu_1 x_1 = \rho\Sigma\mu_1 x'_1, \quad \Sigma\mu_1 y_1 = \rho\Sigma\mu_1 y'_1,$$

joindre à celles-ci l'équation $\Sigma\mu_1 = 0$, puis éliminer μ_1, μ_2, μ_3; ce qui conduit à l'équation déterminant l'inconnue auxiliaire ρ, à savoir

$$\begin{vmatrix} x_1 - \rho x'_1 & y_1 - \rho y'_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Les masses cherchées μ_1, μ_2, μ_3 sont proportionnelles aux mineurs relatifs à une même colonne du déterminant (8).

4. Si les triangles $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ sont situés dans les deux plans π et π' qui se coupent suivant la droite d, soient (x_r, y_r, z_r), (x'_r, y'_r, z'_r), (x, y, z), les coordonnées des points A_r, A'_r et d'un équicentre M rapportés à trois axes quelconques Ox, Oy, Oz; nous aurons.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\Sigma\mu_1 x_1}{\Sigma\mu_1} = \frac{\Sigma\mu_1 x'_1}{\Sigma\mu_1}, \\ y &= \frac{\Sigma\mu_1 y_1}{\Sigma\mu_1} = \frac{\Sigma\mu_1 y'_1}{\Sigma\mu_1}, \\ z &= \frac{\Sigma\mu_1 z_1}{\Sigma\mu_1} = \frac{\Sigma\mu_1 z'_1}{\Sigma\mu_1}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Posons $x'_r - x_r = \alpha_r$, $y'_r - y_r = \beta_r$, $z'_r - z_r = \gamma_r$; α_r, β_r, γ_r seront les coordonnées de l'extrémité du vecteur ON_r équipollent au vecteur $A_rA'_r$.

Des équations (9) on déduit

$$\Sigma\mu_1\alpha_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1\beta_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1\gamma_1 = 0; \tag{10}$$

(*) Des deux premières des équations (10) on déduit que les masses sont proportionnelles aux aires des projections des triangles ON_2N_3, ON_3N_1, ON_1N_2 sur le plan $x0y$ et par suite aux aires de ces triangles.

par suite, si les équations (10) sont distinctes, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

condition qui exprime que les droites ON_1, ON_2, ON_3 sont dans un même plan ou que les droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ sont parallèles à un même plan. Si cette condition est remplie, les deux triangles ont un équicentre unique situé nécessairement sur la droite d et correspondant encore à des masses qui sont proportionnelles aux aires des triangles ON_2N_3, ON_3N_1, ON_1N_2.

Si l'on a

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

les droites ON_1, ON_2, ON_3 sont situées dans un même plan passant par l'axe Oz; par suite les droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ sont parallèles à ce même plan, et l'on rentre dans le cas précédent.

Les trois équations (10) sont identiques lorsque les droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ sont parallèles entre elles; les deux triangles admettent alors une infinité d'équicentres dont le lieu géométrique est la droite d.

Examinons l'hypothèse $\Sigma\mu_1 = 0$. L'équicentre, s'il existe, est nécessairement à l'infini sur la droite d; par suite les parallèles à d menées par A_1 et A'_1 doivent diviser les droites A_2A_3, $A'_2A'_3$ dans un même rapport.

Pour traiter cette hypothèse par le calcul, prenons pour axe des y la droite d, pour axes des x et des y deux droites quelconques menées par un point O de d l'une dans le plan π, l'autre dans le plan π'; alors $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$. Lorsque les axes coordonnés sont quelconques, les équations des droites A_1E_1, $A'_1E'_1$ sont

$$\frac{x - x_1}{\Sigma\mu_1 x_1} = \frac{y - y_1}{\Sigma\mu_1 y_1} = \frac{z - z_1}{\Sigma\mu_1 z_1},$$

$$\frac{x - x'_1}{\Sigma\mu_1 x'_1} = \frac{y - y'_1}{\Sigma\mu_1 y'_1} = \frac{z - z'_1}{\Sigma\mu_1 z'_1}.$$

Le choix particulier des axes les ramène à

$$\frac{x - x_1}{\Sigma \mu_1 x_1} = \frac{y - y_1}{\Sigma \mu_1 y_1} = \frac{z}{0},$$

$$\frac{x}{0} = \frac{y - y_1'}{\Sigma \mu_1 y_1'} = \frac{z - z_1'}{\Sigma \mu_1 z_1'}.$$

Les droites A_1E_1, $A_1'E_1'$ étant parallèles, on doit avoir

$$\Sigma \mu_1 z_1 = 0, \quad \Sigma \mu_1 z_1' = 0, \tag{11}$$

et leurs équations deviennent

$$x = x_1, \quad z = 0; \qquad x = 0, \quad z = z_1',$$

ce qui montre bien que ces droites sont parallèles à d.

En éliminant μ_1, μ_2, μ_3 entre les équations (11) et $\Sigma \mu_1 = 0$, on trouve

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1' & z_2' & z_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition admet l'interprétation suivante : Les trois plans parallèles à π menés par A_1', A_2', A_3' coupent respectivement les trois plans parallèles à π' menés par A_1, A_2, A_3 suivant trois droites parallèles qui sont situées dans un même plan.

5. Considérons deux quadrangles coplanaires $A_1A_2A_3A_4$, $A_1'A_2'A_3'A_4'$. Un équicentre satisfait aux équations (2) et (3), le signe sommatoire étant étendu aux quatre indices 1, 2, 3, 4.

Si les équations (2) sont distinctes, elles admettent pour les rapports $\mu_1' : \mu_2' : \mu_3' : \mu_4'$ une simple infinité de solutions. En éliminant μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 entre les équations (2) et les équations (3) mises sous la forme

$$\Sigma \mu_1 (x - x_1) = 0, \quad \Sigma \mu_1 (y - y_1) = 0,$$

on trouve

$$\left| \begin{matrix} x - x_1 & y - y_1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{matrix} \right| = 0.$$

Donc, en général, *deux quadrangles coplanaires ont une infinité d'équicentres situés sur une même droite.* Cette droite contient évidemment les équicentres des quatre couples de triangles $(A_1A_2A_3, A'_1A'_2A'_3)$, $(A_2A_3A_4, A'_2A'_3A'_4)$, etc.

Si les droites $A_rA'_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ sont parallèles entre elles, on n'a plus que trois équations distinctes

$$\Sigma\mu_1(x - x_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1(y - y_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1\alpha_1 = 0,$$

et tout point (x, y) du plan est un équicentre pour les masses satisfaisant à ces équations.

6. Passons au cas de deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$; les équations (9) et (10) sont maintenant à étendre aux quatre indices 1, 2, 3, 4. Si les dernières sont distinctes, on en déduit

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{matrix} \right\|. \qquad (11)$$

On en conclut que *deux tétraèdres ont, en général, un seul équicentre* M *qui a les mêmes coordonnées barycentriques dans chacun de ces tétraèdres que le point* O *dans le tétraèdre* $N_1N_2N_3N_4$.

Le point M peut se construire comme il suit :

Les faces homologues des tétraèdres proposés se coupent suivant quatre droites f_1, f_2, f_3, f_4; *les plans menés respectivement par* A_1 *et* A'_2 *et parallèles aux plans* $A_2A_3A_4$, $A'_2A'_3A'_4$ *se coupent suivant une droite* g_1; *soient* g_2, g_3, g_4 *les trois droites analogues à* g_1. *Alors les plans* $f_1g_1, f_2g_2, f_3g_3, f_4g_4$ *passent par* M.

Remarquons aussi la proposition suivante :

Etant données sur quatre droites quelconques de l'espace quatre ponctuelles semblables, il existe, en général, quatre masses $\mu_1, \mu_2,$

μ_3, μ_4 *qui, placées en quatre points homologues quelconques de ces ponctuelles, ont toujours le même centre de gravité.*

7. Les trois équations (10) se réduisent à deux, si leurs coefficients vérifient les relations

$$p\alpha_r + q\beta_r + s\gamma_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3, 4). \tag{12}$$

Elles admettent alors une simple infinité de valeurs des rapports $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4$. Les égalités (12) expriment que les points N_1, N_2, N_3, N_4 sont situés dans le plan $px + qy + sz = 0$ ou que les droites $A_rA'_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ sont parallèles à un même plan. La détermination d'un équicentre dépend maintenant de cinq équations

$$\Sigma\mu_1(x - x_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1(y - y_1) = 0, \quad \Sigma\mu_1(z - z_1) = 0,$$
$$\Sigma\mu_1\alpha_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1\beta_1 = 0.$$

En éliminant μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 on trouve deux équations du premier degré en x, y, z, à savoir

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe donc maintenant une droite d'équicentres. Les quatre couples de faces correspondantes des deux tétraèdres admettent chacun en équicentre, et les quatre équicentres sont collinéaires.

Voici deux cas particuliers remarquables rentrant dans l'hypothèse précédente.

Si les droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ sont parallèles entre elles, la droite d'intersection des plans $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ est une ligne d'équicentres pour les triangles $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ (§ 4) ; c'est aussi une ligne d'équicentres pour les deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$, la masse μ_4 étant supposée égale à 0. D'ailleurs, si l'on suppose

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3,$$

les équations (10) ont la forme

$$\begin{aligned}\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \mu_3\alpha_3 + \mu_4\alpha_4 &= 0,\\ \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \mu_3\alpha_3 + l\mu_4\beta_4 &= 0,\\ \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \mu_3\alpha_3 + l'\mu_4\gamma_4 &= 0\end{aligned}$$

et exigent

$$\mu_4 = 0, \quad \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \mu_3\alpha_3 = 0.$$

Supposons les droites A_1A_1' et A_2A_2' parallèles entre elles, ainsi que les droites A_3A_3' et A_4A_4', et soient P l'intersection des droites A_1A_2 et $A_1'A_2'$, P′ celui des droites A_3A_4 et $A_3'A_4'$. Comme on a

$$PA_1 : PA_2 = PA_1' : PA_2', \quad P'A_3 : P'A_4 = P'A_3' : P'A_4',$$

tout point de la droite PP′ est un équicentre. Les équations (10) se réduisent maintenant à $\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 = 0$, $\mu_3\alpha_3 + \mu_4\alpha_4 = 0$.

Les équations (10) se réduisent à une seule si les droites A_rA_r' ($r = 1, 2, 3, 4$) sont parallèles entre elles. Alors tout point du plan représenté par l'équation (13) est un équicentre des deux tétraèdres.

8. Pour trouver le centre de gravité M des masses μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 placées en A_1, A_2, A_3, A_4, on peut chercher les centres de gravité F_1, F_2, F_3, F_4 des triples (μ_2, μ_3, μ_4), (μ_3, μ_4, μ_1), ...; les droites A_rF_r ($r = 1, 2, 3, 4$) concourent en M, et l'on a $F_rM : F_rA_r = \mu_r : \Sigma\mu_1$. Si $\Sigma\mu_1 = 0$, les droites A_rF_r sont parallèles et l'on dit que M est à l'infini dans la direction de ces parallèles.

Les paramètres directeurs de la droite A_1F_1 sont proportionnels aux quantités

$$x_1 - \frac{\mu_2x_2 + \mu_3x_3 + \mu_4x_4}{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}, \quad y_1 - \frac{\mu_2y_2 + \mu_3y_3 + \mu_4y_4}{\mu_2 + \mu_3 + \mu} \ldots;$$

si l'on remplace $\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ par $-\mu_1$, on est conduit à prendre pour ces paramètres

$$\Sigma\mu_1 x_1, \quad \Sigma\mu_1 y_1, \quad \Sigma\mu_1 z_1.$$

Deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ sont dits avoir un équicentre à l'infini, si les droites A_1F_1, $A'_1F'_1$ qui joignent les sommets A_1, A'_1 aux centres de gravité F_1, F'_1 des mêmes masses μ_2, μ_3, μ_4 attachées respectivement en A_2, A_3, A_4 ou en A'_2, A'_3, A'_4 sont parallèles entre elles.

L'existence d'un tel équicentre dépend des quatre équations

$$\Sigma\mu_1 x_1 = \rho\Sigma\mu_1 x'_1, \quad \Sigma\mu_1 y_1 = \rho\Sigma\mu_1 y'_1, \quad \Sigma\mu_1 z_1 = \rho\Sigma\mu_1 z'_1, \quad \Sigma\mu_1 = 0, \quad (14)$$

ρ étant une inconnue qui est racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} x_1 - \rho x'_1 & y_1 - \rho y'_1 & z_1 - \rho z'_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Le problème suivant conduit à la même équation cubique (15) : Trouver un plan qui partage les quatre droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ dans un même rapport.

Imprimons au tétraèdre $A'_1A'_2A'_3A'_4$ une translation parallèle qui amène A'_1 en A_1 ; alors les droites A_1F_1, $A'_1F'_1$ coïncideront. Or, si G_1, G'_1 sont les centres de gravité des mêmes masses ν_2, ν_3, ν_4 attachées respectivement en A_2, A_3, A_4 ou en A'_2, A'_3, A'_4, les droites A_1G_1, $A'_1G'_1$ sont des éléments homologues de deux gerbes collinéaires dont A_1E_1 est un rayon double. La question est ainsi ramenée à une question connue.

9. Pour terminer, considérons deux systèmes de cinq points. La recherche d'un équicentre dépend des six équations

$$x = \frac{\Sigma\mu_1 x_1}{\Sigma\mu_1}, \quad y = \frac{\Sigma\mu_1 y_1}{\Sigma\mu_1}, \quad z = \frac{\Sigma\mu_1 z_1}{\Sigma\mu_1}, \quad (16)$$

$$\Sigma\mu_1\alpha_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1\beta_1 = 0, \quad \Sigma\mu_1\gamma_1 = 0, \quad (17)$$

qui renferment sept inconnues x, y, z, $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4 : \mu_5$.

Si les équations (17) sont distinctes, elles donnent pour les

rapports des masses une simple infinité d'équicentres situés sur la droite qui a pour équations

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Les équations (17) se réduisent à deux, si leurs coefficients vérifient une même relation

$$p\alpha_r + q\beta_r + s\gamma_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots 5).$$

Les droites $A_rA'_r$ sont alors parallèles à un même plan et les deux systèmes de points $[A_r]$, $[A'_r]$ admettent un plan d'équicentres représenté par l'équation (18). Ce plan contient nécessairement les droites lieux des équicentres des cinq couples de tétraèdres $(A_1A_2A_3A_4, A'_1A'_2A'_3A'_4)$, $A_2A_3A_4A_5$, $A'_2A'_3A'_4A'_5)$, ...

Les équations (17) se réduisent à une seule, si les droites $A_rA'_r$ sont parallèles entre elles; alors un point quelconque de l'espace est équicentre pour des masses convenablement choisies.

Dans ce qui précède, nous avons considéré les cas principaux. Mais on peut encore envisager des hypothèses particulières, par exemple celles où deux, trois ou quatre seulement des cinq droites $A_rA'_r$ sont parallèles entre elles ou celle de deux droites parallèles à une direction et deux autres parallèles à une autre direction, etc.

SUR

LES CARRÉS PANMAGIQUES

PAR

Edouard BARBETTE

Docteur en sciences physiques et mathématiques,
Professeur a l'École industrielle de Liége,
Directeur des études a l'Institut Francken.

SUR

LES CARRÉS PANMAGIQUES

On donne actuellement le nom de *carrés panmagiques* aux carrés magiques dont la direction horizontale, la direction verticale et les deux directions diagonales sont magiques.

Le Prof[r] Édouard Lucas les avait qualifiés de *diaboliques*, on ne sait trop pourquoi; ces carrés avaient été entrevus, avant Lucas, par de La Hire, Euler et Sauveur.

De l'étude que nous avons faite sur les carrés magiques (*), il résulte qu'un carré du m^e ordre sera panmagique si la somme des premiers indices, comme celle des seconds, de chacune des lignes horizontales, de chacune des lignes verticales, de chacune des lignes parallèles aux deux directions diagonales et de chacune des diagonales elles-mêmes du carré symbolique générateur, égale $(1+2+3+\cdots+m)$ ou $\frac{m(m+1)}{2}$.

(*) A consulter : *Les carrés magiques du m^e ordre.* Supplément : *Les piles merveilleuses*, par E. Barbette. Vol. in-8° de VII-244 et 16 pages, avec 3 planches, dont l'une en couleurs. *Prix :* fr. 7.50, chez l'auteur, 18, rue D'Archis, Liége.

A. — Carrés panmagiques d'ordre $2^k \equiv 4n$ et de symétrie $\frac{1}{1}$

Les carrés panmagiques d'ordre 2^k et de symétrie $\frac{1}{1}$ sont ceux que nous déduisons de carrés symboliques renfermant 2^{2k} officiers de 2^k régiments distincts et 2^k grades différents, — l'élément s_t de ces carrés symboliques représentant un officier de régiment s et de grade t, — chacune des lignes horizontales, comme chacune des lignes verticales de tels carrés, contenant 2^k officiers de régiments distincts et de grades différents.

Les carrés panmagiques d'ordre 2^k et de symétrie $\frac{1}{1}$ sont les plus difficiles à construire; voici l'une des lois qui régissent les carrés symboliques générateurs :

Première ligne horizontale du carré symbolique.

Premiers indices :

$1;\ 3n;\ 3n-1;\ 2;\ 3;\ 3n-2;\ 3n-3;\ 4;\ \cdots;\ n-3;\ 2n+4;$
$2n+3;\ n-2;\ n-1;\ 2n+2;\ 2n+1;\ n;$
$3n+1;\ 2n;\ 2n-1;\ 3n+2;\ 3n+3;\ 2n-2;\ 2n-3;\ 3n+4;$
$\cdots;\ 4n-3;\ n+4;n+3;\ 4n-2;\ 4n-1;\ n+2;\ n+1;\ 4n.$

Seconds indices :

$1;\ 3n-1;\ 3;\ 3n-3;\ \cdots;\ n-3;\ 2n+3;\ n-1;\ 2n+1;$
$3n+1;2n-1;3n+3;2n-3;\cdots;4n-3;n+3;4n-1;n+1;$
$n;\ 2n+2;\ n-2;\ 2n+4;\ \cdots;\ 4;\ 3n-2;\ 2;\ 3n;$
$4n;\ n+2;\ 4n-2;\ n+4;\ \cdots;\ 3n+4;\ 2n-2;\ 3n+2;\ 2n.$

Première diagonale.

Premiers indices :

$\overbrace{1;\ 1;\ 1;\ \cdots;\ 1}^{n \text{ fois}};\ \overbrace{4n;\ 4n;\ 4n;\ \cdots;\ 4n}^{2n \text{ fois}};\ \overbrace{1;\ 1:\ 1;\ \cdots;\ 1.}^{n \text{ fois}}$

Seconds indices :

$1; 4n; 2; 4n-1; 3; 4n-2; \cdots; n-3; 3n+4; n-2; 3n+3; n-1; 3n+2; n; 3n+1;$
$4n; 1: 4n-1; 2; 4n-2; 3; \cdots; 3n+4; n-3; 3n+3; n-2; 3n+2; n-1; 3n+1; n.$

Autres lignes horizontales. — Les autres lignes horizontales se déduisent facilement de la première, par symétrie, les indices de la première diagonale servant de points de repère.

En opérant ainsi, la somme tant des premiers indices que des seconds de chacune des lignes horizontales, de chacune des lignes verticales, de chacune des lignes parallèles aux deux directions diagonales et de chacune des diagonales elles-mêmes, égale la constante magique $2n(4n+1)$, et la condition de panmagie est satisfaite.

La loi énoncée n'est pas applicable au carré du 4e ordre et de symétrie $\frac{1}{1}$; mais un tel carré se détermine facilement.

Si, dans le carré symbolique obtenu, on remplace l'élément s_t par $A_s + a_t$, la somme des nombres de chacune des horizontales et de chacune des verticales est constante, et il est facile d'écrire les relations qui doivent exister entre les nombres A et a pour rendre le carré panmagique.

Si, de plus, on y prend

$$A_1 = 0;\ A_2 = 4nr;\ A_3 = 8nr;\ \cdots\cdots;\ A_{4n} = (4n-1)\,4nr$$

et

$$a_1 = a;\ a_2 = a + r;\ a_3 = a + 2r;\ \cdots\cdots;\ a_{4n} = a + (4n-1)\,r,$$

on forme un carré panmagique renfermant les termes suivants, en progression arithmétique :

$$a;\ a+r;\ a+2r;\ a+3r;\ \cdots\cdots;\ a+(16n^2-1)\,r;$$

enfin si, dans ce dernier carré, on fait $a = 1$ et $r = 1$, on obtient un carré panmagique des $16n^2$ ou 2^{2k} premiers nombres.

Observation. — Du panmagique obtenu en suivant la règle énoncée, on en déduit facilement d'autres en changeant dans

les premiers indices 1 en h et $4n$ en $4n - h + 1$, et réciproquement, — ou encore en changeant dans les seconds indices l'un quelconque d'entre eux h en $4n - h + 1$, et réciproquement, — ou enfin, dans tous les carrés obtenus, en changeant les premiers indices en seconds, et réciproquement.

Nous nous contenterons, dans chacun de nos exemples, de donner le carré symbolique type, puis le carré littéral à termes en progression arithmétique et le carré numérique qui s'en déduisent; dans le carré littéral, le symbole $\overset{a}{pr}$ se lira $a + pr$.

Propriétés. — Il est possible de grouper les éléments d'un carré symbolique de façon à découvrir, par voie d'addition des indices qui interviennent dans les groupements, les propriétés du panmagique qui s'en déduit. Par exemple, considérons le carré symbolique, dont nous venons d'indiquer la construction, partagé en deux parties égales par une horizontale : la somme des premiers et des seconds indices de chacune des demi-colonnes ainsi formées étant constante, la somme des nombres intervenant dans les demi-colonnes correspondantes du carré littéral et du carré numérique (pour $n > 1$) sera la même pour chacune d'elles.

Pour $n = 1$, pas n'est besoin de double vue pour découvrir les propriétés du carré numérique par voie d'addition des indices des éléments groupés du carré symbolique.

CARRÉS PANMAGIQUES DU 4e ORDRE ET DE SYMÉTRIE $\frac{1}{1}$.

Carré symbolique.

1_1	3_4	2_3	4_2
2_4	4_1	1_2	3_3
3_2	1_3	4_4	2_1
4_3	2_2	3_1	1_4

Carré littéral.

a	$a+11z$	$a+6z$	$a+13z$
$a+7z$	$a+12z$	$a+2z$	$a+10z$
$a+9z$	$a+2z$	$a+15z$	$a+4z$
$a+14z$	$a+5z$	$a+8z$	$a+3z$

Carré numérique.

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

CARRÉS PANMAGIQUES DU 8e ORDRE ET DE SYMÉTRIE $\frac{1}{1}$.

Carré symbolique.

1_1	6_5	5_7	2_3	7_2	4_6	3_8	8_4
6_4	1_8	2_6	5_2	4_3	7_7	8_5	3_1
4_8	7_4	8_2	3_6	6_7	1_3	2_1	5_5
7_5	4_1	3_3	8_7	1_6	6_2	5_4	2_8
2_7	5_3	6_1	1_5	8_8	3_4	4_2	7_6
5_6	2_2	1_4	6_8	3_5	8_1	7_3	4_7
3_2	8_6	7_8	4_4	5_1	2_5	1_7	6_3
8_3	3_7	4_5	7_1	2_4	5_8	6_6	1_2

Carré littéral.

a	a + 44z	a + 38z	a + 10z	a + 49z	a + 29z	a + 23z	a + 59z
a + 43z	a + 7z	a + 1.3z	a + 33z	a + 26z	a + 54z	a + 60z	a + 16z
a + 31z	a + 51z	a + 57z	a + 21z	a + 46z	a + 2z	a + 8z	a + 36z
a + 58z	a + 24z	a + 18z	a + 62z	a + 5z	a + 41z	a + 35z	a + 15z
a + 14z	a + 34z	a + 40z	a + 4z	a + 63z	a + 19z	a + 25z	a + 53z
a + 37z	a + 9z	a + 3z	a + 47z	a + 20z	a + 56z	a + 50z	a + 30z
a + 17z	a + 61z	a + 55z	a + 27z	a + 32z	a + 12z	a + 6z	a + 48z
a + 58z	a + 22z	a + 28z	a + 48z	a + 11z	a + 39z	a + 45z	a + z

Carré numérique.

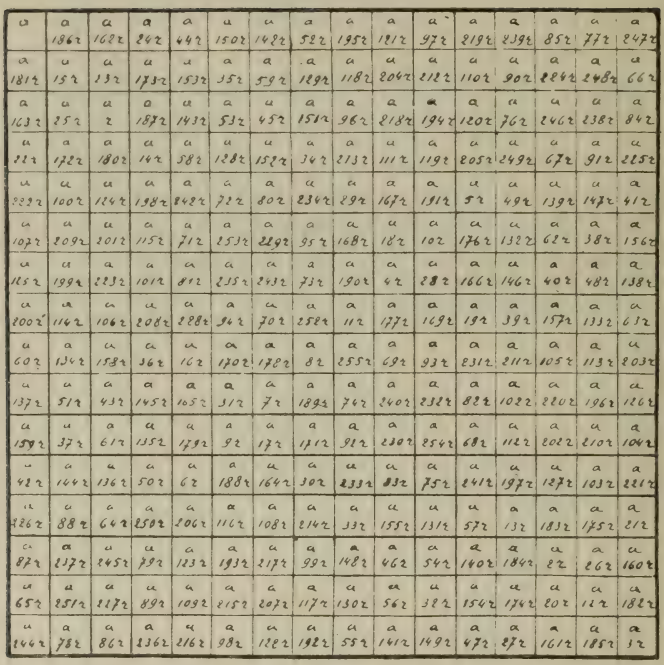
1	45	39	11	50	30	24	60
44	8	14	34	27	55	61	17
32	52	58	22	47	3	9	37
53	25	19	63	6	42	36	16
15	35	41	5	64	20	26	54
38	10	4	48	21	57	51	31
18	62	56	28	33	13	7	43
59	23	29	49	12	40	46	2

Carrés panmagiques du 16e ordre et de symétrie $\frac{1}{1}$.

Carré symbolique.

1_1	12_{11}	11_3	2_9	3_{13}	10_7	9_{15}	4_5	13_4	8_{10}	7_2	14_{12}	15_{16}	6_6	5_{14}	16_8
12_6	1_{16}	2_8	11_{14}	10_{10}	3_4	4_{12}	9_2	8_7	13_{13}	14_5	7_{15}	6_{11}	15_1	16_9	5_3
11_4	2_{10}	1_2	12_{12}	9_{16}	4_6	3_{14}	10_8	7_1	14_{11}	13_3	8_9	5_{13}	16_7	15_{15}	6_5
2_7	11_{13}	12_5	1_{15}	4_{11}	9_1	10_9	3_3	14_6	7_{16}	8_8	13_{14}	16_{10}	5_4	6_{12}	15_2
14_{15}	7_5	8_{13}	13_7	16_3	5_9	6_1	15_{11}	2_{14}	11_8	12_{16}	1_6	4_2	9_{12}	10_4	3_{10}
7_{12}	14_8	13_{10}	8_4	5_8	16_{14}	15_6	6_{16}	11_9	2_3	1_{11}	12_1	9_5	4_{15}	3_7	10_{13}
8_{14}	13_8	14_{16}	7_6	6_2	15_{12}	16_4	5_{10}	12_{15}	1_5	2_{13}	11_7	10_3	3_9	4_1	9_{11}
13_9	8_3	7_{11}	14_1	15_5	6_{15}	5_7	16_{13}	1_{12}	12_2	11_{10}	2_4	3_8	10_{14}	9_6	4_{16}
4_{13}	9_7	10_{15}	3_5	2_1	11_{11}	12_3	1_9	16_{16}	5_6	6_{14}	15_8	14_4	7_{10}	8_2	13_{12}
9_{10}	4_4	3_{12}	10_2	11_6	2_{16}	1_8	12_{14}	5_{11}	16_1	15_9	6_3	7_7	14_{13}	13_5	8_{15}
10_{16}	3_6	4_{14}	9_8	12_4	1_{10}	2_2	11_{12}	6_{13}	15_7	16_{15}	5_5	8_1	13_{11}	14_3	7_9
3_{11}	10_1	9_9	4_3	1_7	12_{13}	11_5	2_{15}	15_{10}	6_4	5_{12}	16_2	13_6	8_{16}	7_8	14_{14}
15_3	6_9	5_1	16_{11}	13_{15}	8_5	7_{13}	14_7	3_2	10_{12}	9_4	4_{10}	1_{14}	12_8	11_{16}	2_6
6_8	15_{14}	16_6	5_{16}	8_{12}	13_2	14_{10}	7_4	10_5	3_{15}	4_7	9_{13}	12_9	1_3	2_{11}	11_1
5_2	16_{12}	15_4	6_{10}	7_{14}	14_8	13_{16}	8_6	9_3	4_9	3_1	10_{11}	11_{15}	2_5	1_{13}	12_7
16_5	5_{15}	6_7	15_{13}	14_9	7_3	8_{11}	13_1	4_8	9_{14}	10_6	3_{16}	2_{12}	11_2	12_{10}	1_4

Carré littéral.



Carré numérique.

1	187	163	25	45	151	143	53	196	122	98	220	240	86	78	248
182	16	24	174	154	36	60	130	119	205	213	111	91	225	249	67
164	26	2	188	144	54	46	152	97	219	195	121	77	247	239	85
23	173	181	15	59	129	153	35	214	112	120	206	250	68	92	226
223	101	125	199	243	73	81	235	30	168	192	6	50	140	148	42
108	210	202	116	72	254	230	96	169	19	11	177	133	63	39	157
126	200	224	102	82	236	244	74	191	5	29	167	147	41	49	139
201	115	107	209	229	95	71	253	12	178	170	20	40	158	134	64
61	135	159	37	17	171	179	9	256	70	94	232	212	106	114	204
138	52	44	146	166	32	8	190	75	241	233	83	103	221	197	127
160	38	62	136	180	10	18	172	93	231	255	69	113	203	211	105
43	145	137	51	7	189	165	31	234	84	76	242	198	128	104	222
227	89	65	251	207	117	109	215	34	156	132	58	14	184	176	22
88	238	246	80	124	194	218	100	149	47	55	141	185	3	27	161
66	252	228	90	110	216	208	118	131	57	33	155	175	21	13	183
245	79	87	237	217	99	123	193	56	142	150	48	28	162	186	4

B. — Carrés panmagiques impairs.

Les carrés panmagiques impairs sont ceux que nous déduisons de carrés symboliques renfermant $(2n+1)^2$ officiers de $(2n+1)$ régiments distincts et de $(2n+1)$ grades différents, chacune des lignes horizontales, comme chacune des lignes verticales de tels carrés, contenant $(2n+1)$ officiers de régiments distincts et de grades différents.

Sauf pour les carrés de côté $3t$, le tableau

x_1	x_{2n+1}	x_{2n}	·	x_4	x_3	x_2
x_3	x_2	x_1	·	x_6	x_5	x_4
x_5	x_4	x_3	·	x_8	x_7	x_6
·		·	·	·	·	·
x_{2n-4}	x_{2n-5}	x_{2n-6}	·	x_{2n-1}	x_{2n-2}	x_{2n-3}
x_{2n-2}	x_{2n-3}	x_{2n-4}	·	x_{2n+1}	x_{2n}	x_{2n-1}
x_{2n}	x_{2n-1}	x_{2n-2}	·	x_2	x_1	x_{2n+1}

(1)

renferme les premiers indices d'une solution symbolique du $(2n+1)^e$ ordre, la suite $x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_{2n+1}$ représentant la série des nombres $1, 2, 3, \cdots, 2n+1$ écrits dans un ordre arbitraire. Le carré symbolique s'en déduira par superposition des bandes horizontales ou verticales de rangs complémentaires, c'est-à-dire de rangs z et $2n - z + 2$.

Dans le carré ainsi formé, non seulement chacune des lignes horizontales, comme chacune des lignes verticales, renfermera $(2n+1)$ officiers de régiments distincts et de grades différents, mais les directions diagonales posséderont la même propriété.

Si l'on y remplace l'élément s_t par $A_s + a_t$, la somme des nombres de chacune des lignes parallèles à la direction hori-

zontale, à la direction verticale et aux deux directions diagonales, sera constante et le carré sera panmagique *sans aucune condition.*

Si l'on y prend

$$A_1 = 0;\ A_2 = (2n+1)r;\ A_3 = 2(2n+1)r;\ \cdots;\ A_{2n+1} = 2n(2n+1)r,$$
$$a_1 = a;\ a_2 = a + r\ ;\ a_3 = a + 2r\ ;\ \cdots;\ a_{2n+1} = a + 2nr,$$

on formera un carré panmagique renfermant les termes suivants, en progression arithmétique :

$$a;\ a+r;\ a+2r;\ a+3r;\ \cdots\cdots;\ a+4n(n+1)r;$$

enfin si, dans ce dernier carré, on fait $a = 1$ et $r = 1$, on obtiendra un carré panmagique des $(2n+1)^2$ premiers nombres.

La loi que nous venons de donner n'est pas applicable aux carrés de côté $2n + 1 = 3t$, car les éléments contenus dans les parallèles à la seconde diagonale du tableau (1) sont alors les suivants :

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_4 & x_7 & \cdot & \cdot & x_{3t-8} & x_{3t-5} & x_{3t-2}\,; \\
x_2 & x_5 & x_8 & \cdot & \cdot & x_{3t-7} & x_{3t-4} & x_{3t-1}\,; \\
x_3 & x_6 & x_9 & \cdot & \cdot & x_{3t-6} & x_{3t-3} & x_{3t}\ ; \\
x_4 & x_7 & x_{10} & \cdot & \cdot & x_{3t-5} & x_{3t-2} & x_1\ ; \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_t & x_{t+3} & x_{t+6} & \cdot & \cdot & x_{t-9} & x_{t-6} & x_{t-3}\ .
\end{array} \qquad (2)$$

Mais en choisissant les x de façon que la somme des éléments de chacune des lignes de la suite (2) égale le $\frac{1}{3}$ de $(1 + 2 + 3 + \cdots + 3t)$, c'est-à-dire $\frac{t(3t+1)}{2}$, on obtiendra encore un carré panmagique; ce résultat sera facilement atteint en identifiant les x de cette suite avec les nombres d'un carré magique du t^e ordre.

Il n'existe pas de carré panmagique du 3e ordre.

Carrés panmagiques du 5e ordre.

Carré symbolique.

2_5	4_3	1_1	3_4	5_2
3_1	5_4	2_2	4_5	1_3
4_2	1_5	3_3	5_1	2_4
5_3	2_1	4_4	1_2	3_5
1_4	3_2	5_5	2_3	4_1

Carré littéral.

a 9z	a 17z	a	a 13z	a 21z
a 10z	a 23z	a 6z	a 19z	a 2z
a 16z	a 4z	a 18z	a 20z	a 8z
a 22z	a 5z	a 18z	a z	a 14z
a 3z	a 11z	a 24z	a 7z	a 15z

Carré numérique.

10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

Carrés panmagiques du 7e ordre.

Carré symbolique.

2_7	4_5	6_3	1_1	3_6	5_4	7_2
3_1	5_6	7_4	2_2	4_7	6_5	1_3
4_2	6_7	1_5	3_3	5_1	7_6	2_4
5_3	7_1	2_6	4_4	6_2	1_7	3_5
6_4	1_2	3_7	5_5	7_3	2_1	4_6
7_5	2_3	4_1	6_6	1_4	3_2	5_7
1_6	3_4	5_2	7_7	2_5	4_3	6_1

Carré littéral.

a 13z	a 25z	a 37z	a	a 19z	a 31z	a 43z
a 14z	a 33z	a 45z	a 8z	a 27z	a 39z	a 2z
a 22z	a 41z	a 4z	a 16z	a 28z	a 47z	a 10z
a 30z	a 42z	a 12z	a 24z	a 36z	a 6z	a 18z
a 38z	a z	a 20z	a 32z	a 44z	a 7z	a 26z
a 46z	a 9z	a 21z	a 40z	a 3z	a 15z	a 34z
a 5z	a 17z	a 29z	a 48z	a 11z	a 23z	a 35z

Carré numérique.

14	26	38	1	20	32	44
15	34	46	9	28	40	3
23	42	5	17	29	48	11
31	43	13	25	37	7	19
39	2	21	33	45	8	27
47	10	22	41	4	16	35
6	18	30	49	12	24	36

Carrés panmagiques du 9e ordre.

Carré symbolique.

1_2	8_3	7_5	9_6	4_4	6_9	5_7	3_8	2_1
3_5	8_6	1_4	8_9	7_7	9_8	4_1	6_2	5_3
6_4	5_9	3_7	2_8	1_1	8_2	7_3	9_5	4_6
9_7	4_8	6_1	5_2	3_3	2_5	1_6	8_4	7_9
8_1	7_2	9_3	4_5	6_6	5_4	3_9	2_7	1_8
2_3	1_5	8_6	7_4	9_9	4_7	6_8	5_1	3_2
5_6	3_4	2_9	1_7	8_8	7_1	9_2	4_3	6_5
4_9	6_7	5_8	3_1	2_2	1_3	8_5	7_6	9_4
7_8	9_1	4_2	6_3	5_5	3_6	2_4	1_9	8_7

Carré littéral.

a_2	a_{65}	a_{58}	a_{77}	a_{30}	a_{53}	a_{42}	a_{25}	a_9
a_{23}	a_{14}	a_3	a_{71}	a_{60}	a_{79}	a_{27}	a_{46}	a_{38}
a_{49}	a_{45}	a_{25}	a_{16}	a_1	a_{64}	a_{56}	a_{76}	a_{33}
a_{79}	a_{35}	a_{46}	a_{38}	a_{20}	a_{13}	a_5	a_{66}	a_{63}
a_{64}	a_{56}	a_{75}	a_{32}	a_{50}	a_{39}	a_{26}	a_{15}	a_7
a_{12}	a_5	a_{68}	a_{57}	a_{80}	a_{33}	a_{52}	a_{36}	a_{19}
a_{42}	a_{22}	a_{17}	a_6	a_{70}	a_{54}	a_{73}	a_{29}	a_{48}
a_{36}	a_{52}	a_{43}	a_{18}	a_{10}	a_2	a_{67}	a_{59}	a_{75}
a_{61}	a_{72}	a_{28}	a_{47}	a_{40}	a_{23}	a_{12}	a_8	a_{69}

Carré numérique.

2	66	59	78	31	54	43	26	10
23	15	4	72	61	80	28	47	39
49	45	25	17	1	65	57	77	33
79	35	46	38	21	14	6	67	63
64	56	75	32	51	40	27	16	8
12	5	69	58	81	34	53	37	20
42	22	18	7	71	55	74	30	50
36	52	44	19	11	3	68	60	76
62	73	29	48	41	24	13	9	70

Le carré du 9e ordre en (A, a), qui se déduit du carré symbolique en remplaçant l'élément s_t par $A_s + a_t$, n'est panmagique que si les nombres A et a satisfont aux conditions :

$$3(A_2 + A_6 + A_7) = 3(A_3 + A_4 + A_8) = 3(A_1 + A_5 + A_9) = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_9$$

et

$$3(a_2 + a_6 + a_7) = 3(a_3 + a_4 + a_8) = 3(a_1 + a_5 + a_9) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9.$$

C. — Carrés panmagiques d'ordre $2^{k+1}.n$ et de symétrie $\frac{1}{2n}$. ($k \geq 1$; $n \geq 1$)

Les carrés panmagiques d'ordre $2^{k+1}.n$ et de symétrie $\frac{1}{2n}$ sont ceux que nous déduisons de carrés symboliques contenant $4^{k+1}.n^2$ officiers de $2^{k+1}.n$ régiments distincts et de $2^{k+1}.n$ grades différents, chacune des lignes horizontales de tels carrés renfermant $2^{k+1}.n$ officiers de 2^k régiments distincts et de grades différents, chacune des lignes verticales renfer-

mant $2^{k+1}.n$ officiers de 2^k grades différents et de régiments distincts.

Ces carrés répondent à une symétrie $\frac{2^k}{2^{k+1}.n}$ ou $\frac{1}{2n}$.

1re HYPOTHÈSE : $k = 1$.

Carré symbolique d'ordre 4n *et de symétrie* $\frac{1}{2n}$.

1 1	4n 4n-1	1 3	4n 4n-3	1 5	4n 4n-5	.	.	1 2n-1	4n 2n+1	1 4n	4n 2	1 4n-2	4n 4	1 4n-4	4n 6	.	.	1 2n+2	4n 2n
4n-1 4n	2 2	4n-1 4n-2	2 4	4n-1 4n-4	2 6	.	.	4n-1 2n+1	2 2n	4n-1 1	2 4n-1	4n-1 3	2 4n-3	4n-1 5	2 4n-5	.	.	4n-1 2n-1	2 2n+1
3 1	4n-2 4n-1	3 3	4n-2 4n-3	3 5	4n-2 4n-5	.	.	3 2n-1	4n-2 2n+1	3 4n	4n-2 2	3 4n-2	4n-2 4	3 4n-4	4n-2 6	.	.	3 2n+2	4n-2 2n
4n-3 4n	4 2	4n-3 4n-2	4 4	4n-3 4n-4	4 6	.	.	4n-3 2n+2	4 2n	4n-3 1	4 4n-1	4n-3 3	4 4n-3	4n-3 5	4 4n-5	.	.	4n-3 2n-1	4 2n+1
5 1	4n-4 4n-1	5 3	4n-4 4n-3	5 5	4n-4 4n-5	.	.	5 2n-1	4n-4 2n+1	5 4n	4n-4 2	5 4n-2	4n-4 4	5 4n-4	4n-4 6	.	.	5 2n+2	4n-4 2n
4n-5 4n	6 2	4n-5 4n-2	6 4	4n-5 4n-4	6 6	.	.	4n-5 2n+2	6 2n	4n-5 1	6 4n-1	4n-5 3	6 4n-3	4n-5 5	6 4n-5	.	.	4n-5 2n-1	6 2n+1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2n-1 1	2n+2 4n-1	2n-1 3	2n+2 4n-3	2n-1 5	2n+2 4n-5	.	.	2n-1 2n-1	2n+2 2n+1	2n-1 4n	2n+2 2	2n-1 4n-2	2n+2 4	2n-1 4n-4	2n+2 6	.	.	2n-1 2n+2	2n+2 2n
2n+1 4n	2n 2	2n+1 4n-2	2n 4	2n+1 4n-4	2n 6	.	.	2n+1 2n+2	2n 2n	2n+1 1	2n 4n-1	2n+1 3	2n 4n-3	2n+1 5	2n 4n-5	.	.	2n+1 2n-1	2n 2n+1
4n 1	1 4n-1	4n 3	1 4n-3	4n 5	1 4n-5	.	.	4n 2n-1	1 2n+1	4n 4n	1 2	4n 4n-2	1 4	4n 4n-4	1 6	.	.	4n 2n+2	1 2n
2 4n	4n-1 2	2 4n-2	4n-1 4	2 4n-4	4n-1 6	.	.	2 2n+2	4n-1 2n	2 1	4n-1 4n-1	2 3	4n-1 4n-3	2 5	4n-1 4n-5	.	.	2 2n-1	4n-1 2n+1
4n-2 1	3 4n-1	4n-2 3	3 4n-3	4n-2 5	3 4n-5	.	.	4n-2 2n-1	3 2n+1	4n-2 4n	3 2	4n-2 4n-2	3 4	4n-2 4n-4	3 6	.	.	4n-2 2n+2	3 2n
4 4n	4n-3 2	4 4n-2	4n-3 4	4 4n-4	4n-3 6	.	.	4 2n+2	4n-3 2n	4 1	4n-3 4n-1	4 3	4n-3 4n-3	4 5	4n-3 4n-5	.	.	4 2n-1	4n-3 2n+1
4n-4 1	5 4n-1	4n-4 3	5 4n-3	4n-4 5	5 4n-5	.	.	4n-4 2n-1	5 2n+1	4n-4 4n	5 2	4n-4 4n-2	5 4	4n-4 4n-4	5 6	.	.	4n-4 2n+2	5 2n
6 4n	4n-5 2	6 4n-2	4n-5 4	6 4n-4	4n-5 6	.	.	6 2n+2	4n-5 2n	6 1	4n-5 4n-1	6 3	4n-5 4n-3	6 5	4n-5 4n-5	.	.	6 2n-1	4n-5 2n+1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2n+2 1	2n-1 4n-1	2n+2 3	2n-1 4n-3	2n+2 5	2n-1 4n-5	.	.	2n+2 2n-1	2n-1 2n+1	2n+2 4n	2n-1 2	2n+2 4n-2	2n-1 4	2n+2 4n-4	2n-1 6	.	.	2n+2 2n+2	2n-1 2n
2n 4n	2n+1 2	2n 4n-2	2n+1 4	2n 4n-4	2n+1 6	.	.	2n 2n+2	2n+1 2n	2n 1	2n+1 4n-1	2n 3	2n+1 4n-3	2n 5	2n+1 4n-5	.	.	2n 2n-1	2n+1 2n+1

Chacune des lignes parallèles aux deux directions diagonales de ce carré renferme $4n$ officiers de grades différents et de régiments distincts.

Si l'on y remplace l'élément s_t par $A_s + a_t$, le carré devient panmagique pourvu que les nombres A et a satisfassent aux conditions :

$$A_1 + A_{4n} = A_2 + A_{4n-1} = A_3 + A_{4n-2} = A_4 + A_{4n-3} = \cdots = \frac{\Sigma(A+a)}{4n}$$

et

$$a_1 + a_{4n} = a_2 + a_{4n-1} = a_3 + a_{4n-2} = a_4 + a_{4n-3} = \cdots = \frac{\Sigma(A+a)}{4n}.$$

Si l'on y prend

$$A_1 = o\,;\ A_2 = 4nr\,;\quad A_3 = 8nr\,;\quad \cdots\,;\ A_{4n} = (4n-1)4nr$$

et

$$a_1 = a\,;\ a_2 = a + r\,;\ a_3 = a + 2r\,;\ \cdots\,;\ a_{4n} = a + (4n-1)r,$$

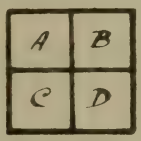
on obtient un carré panmagique renfermant les termes suivants, en progression arithmétique :

$$a\,;\ a + r\,;\ a + 2r\,;\ \cdots\cdots\,;\ a + (16n^2 - 1)r.$$

Enfin si, dans ce dernier carré, on fait $a = 1$ et $r = 1$, on trouve un carré panmagique des $16n^2$ premiers nombres.

Propriétés. — La somme, tant des premiers indices que des seconds, d'un compartiment de 4 cases placé en n'importe quel point du réseau formé par le carré symbolique, étant une constante $(8n + 2)$, la somme des nombres d'une *grille* de 4 cases placée n'importe où dans le carré panmagique, est aussi constante et égale à $\frac{\Sigma(A+a)}{n}$ pour le carré en (A, a), à $4a + 2(16n^2 - 1)r$ pour le carré en (a, r), à $2(16n^2 + 1)$ pour

le carré numérique. Il s'ensuit que la somme des nombres, composant chacun des quatre compartiments de $4n^2$ cases



du carré panmagique, est la même.

La somme des indices des lignes verticales de rang impair des compartiments A et B du carré symbolique, ainsi que des lignes verticales de rang pair des compartiments C et D, étant constante, la somme des nombres des lignes verticales correspondantes du carré panmagique l'est aussi; il en est de même des lignes verticales de rang pair des compartiments A et B, ainsi que des lignes verticales de rang impair des compartiments C et D. La somme des indices des lignes horizontales de rang impair des compartiments A et C du carré symbolique, ainsi que des lignes horizontales de rang pair des compartiments B et D, étant constante, la somme des nombres des lignes horizontales correspondantes du carré panmagique l'est aussi; il en va de même des lignes horizontales de rang pair des compartiments A et C, ainsi que des lignes horizontales de rang impair des compartiments B et D. Enfin, la somme des deux constantes, verticales ou horizontales, égale $\Sigma(A + a)$.

Observation. — En additionnant les indices des éléments *groupés* qui entrent dans la composition d'un carré symbolique, on découvre les propriétés du panmagique correspondant; nous nous bornerons ici à celles que nous avons données, mais il existe encore d'autres relations que le lecteur trouvera facilement en opérant ainsi que nous l'avons indiqué. On découvre de même les propriétés des panmagiques dont nous parlerons plus loin.

Carrés panmagiques du 4e ordre et de symétrie $\frac{1}{2}$.

Carré symbolique.

1_1	4_3	1_4	4_2
3_4	2_2	3_1	2_3
4_1	1_3	4_4	1_2
2_4	3_2	2_1	3_3

Carré littéral.

a	$a+14r$	$a+3r$	$a+13r$
$a+11r$	$a+5r$	$a+8r$	$a+6r$
$a+12r$	$a+2r$	$a+15r$	$a+r$
$a+7r$	$a+9r$	$a+4r$	$a+10r$

Carré numérique.

1	15	4	14
12	6	9	7
13	3	16	2
8	10	5	11

Carrés panmagiques du 8e ordre et de symétrie $\frac{1}{4}$.

Carré symbolique.

1_1	8_7	1_3	8_5	1_8	8_2	1_6	8_4
7_8	2_2	7_6	2_4	7_1	2_7	7_3	2_5
3_1	6_7	3_3	6_5	3_8	6_2	3_6	6_4
5_8	4_2	5_6	4_4	5_1	4_7	5_3	4_5
8_1	1_7	8_3	1_5	8_8	1_2	8_6	1_4
2_8	7_2	2_6	7_4	2_1	7_7	2_3	7_5
6_1	3_7	6_3	3_5	6_8	3_2	6_6	3_4
4_8	5_2	4_6	5_4	4_1	5_7	4_3	5_5

Carré littéral.

a	a_{62}	a_{22}	a_{602}	a_{72}	a_{572}	a_{52}	a_{592}
a_{552}	a_{92}	a_{532}	a_{112}	a_{482}	a_{142}	a_{502}	a_{182}
a_{162}	a_{462}	a_{182}	a_{442}	a_{232}	a_{412}	a_{212}	a_{432}
a_{392}	a_{252}	a_{372}	a_{272}	a_{322}	a_{302}	a_{342}	a_{282}
a_{562}	a_{62}	a_{582}	a_{42}	a_{632}	a_{2}	a_{612}	a_{32}
a_{152}	a_{492}	a_{132}	a_{512}	a_{82}	a_{542}	a_{102}	a_{522}
a_{402}	a_{222}	a_{422}	a_{202}	a_{472}	a_{172}	a_{452}	a_{192}
a_{312}	a_{332}	a_{292}	a_{352}	a_{242}	a_{382}	a_{262}	a_{362}

Carré numérique (*).

1	63	3	61	8	58	6	60
56	10	54	12	49	15	51	13
17	47	19	45	24	42	22	44
40	26	38	28	33	31	35	29
57	7	59	5	64	2	62	4
16	50	14	52	9	55	11	53
41	23	43	21	48	18	46	20
32	34	30	36	25	39	27	37

Carrés panmagiques du 12e ordre et de symétrie $\frac{1}{6}$.

Carré symbolique.

1_1	12_{11}	1_3	12_9	1_5	12_7	1_{12}	12_2	1_{10}	12_4	1_8	12_6
11_{12}	2_2	11_{10}	2_4	11_8	2_6	11_1	2_{11}	11_3	2_9	11_5	2_7
3_1	10_{11}	3_3	10_9	3_5	10_7	3_{12}	10_2	3_{10}	10_4	3_8	10_6
9_{12}	4_2	9_{10}	4_4	9_8	4_6	9_1	4_{11}	9_3	4_9	9_5	4_7
5_1	8_{11}	5_3	8_9	5_5	8_7	5_{12}	8_2	5_{10}	8_4	5_8	8_6
7_{12}	6_2	7_{10}	6_4	7_8	6_6	7_1	6_{11}	7_3	6_9	7_5	6_7
12_1	1_{11}	12_3	1_9	12_5	1_7	12_{12}	1_2	12_{10}	1_4	12_8	1_6
2_{12}	11_2	2_{10}	11_4	2_8	11_6	2_1	11_{11}	2_3	11_9	2_5	11_7
10_1	3_{11}	10_3	3_9	10_5	3_7	10_{12}	3_2	10_{10}	3_4	10_8	3_6
4_{12}	9_2	4_{10}	9_4	4_8	9_6	4_1	9_{11}	4_3	9_9	4_5	9_7
8_1	5_{11}	8_3	5_9	8_5	5_7	8_{12}	5_2	8_{10}	5_4	8_8	5_6
6_{12}	7_2	6_{10}	7_4	6_8	7_6	6_1	7_{11}	6_3	7_9	6_5	7_7

(*) Ce carré se rencontre dans les travaux de M B. Portier, de Toulouse, qui s'est occupé tout particulièrement des carrés panmagiques à grilles, de module 8 $\left(\text{de symétrie } \frac{1}{4}\right)$.

Carré littéral.

a	a + 142 z	a + 2 z	a + 140 z	a + 4 z	a + 138 z	a + 112 z	a + 133 z	a + 9 z	a + 135 z	a + 7 z	a + 137 z
a + 131 z	a + 13 z	a + 129 z	a + 15 z	a + 127 z	a + 17 z	a + 120 z	a + 22 z	a + 122 z	a + 20 z	a + 124 z	a + 18 z
a + 24 z	a + 118 z	a + 26 z	a + 116 z	a + 28 z	a + 114 z	a + 35 z	a + 109 z	a + 33 z	a + 111 z	a + 31 z	a + 113 z
a + 107 z	a + 37 z	a + 105 z	a + 39 z	a + 103 z	a + 41 z	a + 96 z	a + 46 z	a + 98 z	a + 44 z	a + 100 z	a + 42 z
a + 48 z	a + 94 z	a + 50 z	a + 92 z	a + 52 z	a + 90 z	a + 59 z	a + 85 z	a + 57 z	a + 87 z	a + 55 z	a + 89 z
a + 83 z	a + 61 z	a + 81 z	a + 63 z	a + 79 z	a + 65 z	a + 72 z	a + 70 z	a + 74 z	a + 68 z	a + 76 z	a + 66 z
a + 132 z	a + 10 z	a + 134 z	a + 8 z	a + 136 z	a + 6 z	a + 143 z	a + z	a + 141 z	a + 3 z	a + 139 z	a + 5 z
a + 23 z	a + 121 z	a + 21 z	a + 123 z	a + 19 z	a + 125 z	a + 12 z	a + 130 z	a + 14 z	a + 128 z	a + 16 z	a + 126 z
a + 108 z	a + 34 z	a + 110 z	a + 32 z	a + 112 z	a + 30 z	a + 119 z	a + 25 z	a + 117 z	a + 27 z	a + 115 z	a + 29 z
a + 47 z	a + 97 z	a + 45 z	a + 99 z	a + 43 z	a + 101 z	a + 36 z	a + 106 z	a + 38 z	a + 104 z	a + 40 z	a + 102 z
a + 84 z	a + 58 z	a + 86 z	a + 56 z	a + 88 z	a + 54 z	a + 95 z	a + 49 z	a + 93 z	a + 51 z	a + 91 z	a + 53 z
a + 71 z	a + 73 z	a + 69 z	a + 75 z	a + 67 z	a + 77 z	a + 60 z	a + 82 z	a + 62 z	a + 80 z	a + 64 z	a + 78 z

Carré numérique.

1	143	3	141	5	139	12	134	10	136	8	138
132	14	130	16	128	18	121	23	123	21	125	19
25	119	27	117	29	115	36	110	34	112	32	114
108	38	106	40	104	42	97	47	99	45	101	43
49	95	51	93	53	91	60	86	58	88	56	90
84	62	82	64	80	66	73	71	75	69	77	67
133	11	135	9	137	7	144	2	142	4	140	6
24	122	22	124	20	126	13	131	15	129	17	127
109	35	111	33	113	31	120	26	118	28	116	30
48	98	46	100	44	102	37	107	39	105	41	103
85	59	87	57	89	55	96	50	94	52	92	54
72	74	70	76	68	78	61	83	63	81	65	79

2e HYPOTHÈSE : $k = 2$.

Carré symbolique d'ordre 8n et de symétrie $\frac{1}{2n}$.

1 1	8n 8n-1	2 3	8n-1 8n-3	1 5	8n 8n-5	2 7	8n-1 8n-7	.	.	1 8n	8n 2	2 8n-2	8n-1 4	1 8n-4	8n 6	2 8n-6	8n-1 8	.	.
8n-1 8n	2 2	8n 8n-2	1 4	8n-1 8n-4	2 6	8n 8n-6	1 8	.	.	8n-1 1	2 8n-1	8n 3	1 8n-3	8n-1 5	2 8n-5	8n 7	1 8n-7	.	.
3 2	8n-2 8n	4 4	8n-3 8n-2	3 6	8n-2 8n-4	4 8	8n-3 8n-6	.	.	3 8n-1	8n-2 1	4 8n-3	8n-3 3	3 8n-5	8n-2 5	4 8n-7	8n-3 7	.	.
8n-3 8n-1	4 1	8n-2 8n-3	3 3	8n-3 8n-5	4 5	8n-2 8n-7	3 7	.	.	8n-3 2	4 8n	8n-2 4	3 8n-2	8n-3 6	4 8n-4	8n-2 8	3 8n-6	.	.
5 1	8n-4 8n-1	6 3	8n-5 8n-3	5 5	8n-4 8n-5	6 7	8n-5 8n-7	.	.	5 8n	8n-4 2	6 8n-2	8n-5 4	5 8n-4	8n-4 6	6 8n-6	8n-5 8	.	.
8n-5 8n	6 2	8n-4 8n-2	5 4	8n-5 8n-4	6 6	8n-4 8n-6	5 8	.	.	8n-5 1	6 8n-1	8n-4 3	5 8n-3	8n-5 5	6 8n-5	8n-4 7	5 8n-7	.	.
7 2	8n-6 8n	8 4	8n-7 8n-2	7 6	8n-6 8n-4	8 8	8n-7 8n-6	.	.	7 8n-1	8n-6 1	8 8n-3	8n-7 3	7 8n-5	8n-6 5	8 8n-7	8n-7 7	.	.
8n-7 8n-1	8 1	8n-6 8n-3	7 3	8n-7 8n-5	8 5	8n-6 8n-7	7 7	.	.	8n-7 2	8 8n	8n-6 4	7 8n-2	8n-7 6	8 8n-4	8n-6 8	7 8n-6	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8n 1	1 8n-1	8n-1 3	2 8n-3	8n 5	1 8n-5	8n-1 7	2 8n-7	.	.	8n 8n	1 2	8n-1 8n-2	2 4	8n 8n-4	1 6	8n-1 8n-6	2 8	.	.
2 8n	8n-1 2	1 8n-2	8n 4	2 8n-4	8n-1 6	1 8n-6	8n 8	.	.	2 1	8n-1 8n-1	1 3	8n 8n-3	2 5	8n-1 8n-5	1 7	8n 8n-7	.	.
8n-2 2	3 8n	8n-3 4	4 8n-2	8n-2 6	3 8n-4	8n-3 8	4 8n-6	.	.	8n-2 8n-1	3 1	8n-3 8n-3	4 3	8n-2 8n-5	3 5	8n-3 8n-7	4 7	.	.
4 8n-1	8n-3 1	3 8n-3	8n-2 3	4 8n-5	8n-3 5	3 8n-7	8n-2 7	.	.	4 2	8n-3 8n	3 4	8n-2 8n-2	4 6	8n-3 8n-4	3 8	8n-2 8n-6	.	.
8n-4 1	5 8n-1	8n-5 3	6 8n-3	8n-4 5	5 8n-5	8n-5 7	6 8n-7	.	.	8n-4 8n	5 2	8n-5 8n-2	6 4	8n-4 8n-4	5 6	8n-5 8n-6	6 8	.	.
6 8n	8n-5 2	5 8n-2	8n-4 4	6 8n-4	8n-5 6	5 8n-6	8n-4 8	.	.	6 1	8n-5 8n-1	5 3	8n-4 8n-3	6 5	8n-5 8n-5	5 7	8n-4 8n-7	.	.
8n-6 2	7 8n	8n-7 4	8 8n-2	8n-6 6	7 8n-4	8n-7 8	8 8n-6	.	.	8n-6 8n-1	7 1	8n-7 8n-3	8 3	8n-6 8n-5	7 5	8n-7 8n-7	8 7	.	.
8 8n-1	8n-7 1	7 8n-3	8n-6 3	8 8n-5	8n-7 5	7 8n-7	8n-6 7	.	.	8 2	8n-7 8n	7 4	8n-6 8n-2	8 6	8n-7 8n-4	7 8	8n-6 8n-6	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

En particulier, on trouve pour $n = 1$ et pour $n = 2$, les panmagiques suivants :

Carrés panmagiques du 8e ordre et de symétrie $\frac{1}{2}$.

Carré symbolique.

1_1	8_7	2_3	7_5	1_8	8_2	2_6	7_4
7_8	2_2	8_6	1_4	7_1	2_7	8_3	1_5
3_2	6_8	4_4	5_6	3_7	6_1	4_5	5_3
5_7	4_1	6_5	3_3	5_2	4_8	6_4	3_6
8_1	1_7	7_3	2_5	8_8	1_2	7_6	2_4
2_8	7_2	1_6	8_4	2_1	7_7	1_3	8_5
6_2	3_8	5_4	4_6	6_7	3_1	5_5	4_3
4_7	5_1	3_5	6_3	4_2	5_8	3_4	6_6

Carré littéral.

a	a 62	a 10 2	a 52 2	a 7 2	a 57 2	a 13 2	a 51 2
a 55 2	a 9 2	a 61 2	a 3 2	a 48 2	a 14 2	a 58 2	a 4 2
a 17 2	a 47 2	a 27 2	a 37 2	a 22 2	a 40 2	a 28 2	a 34 2
a 38 2	a 24 2	a 44 2	a 18 2	a 33 2	a 31 2	a 43 2	a 21 2
a 56 2	a 6 2	a 50 2	a 12 2	a 63 2	a 2	a 53 2	a N 2
a 15 2	a 49 2	a 5 2	a 59 2	a 8 2	a 54 2	a 22	a 60 2
a 41 2	a 23 2	a 35 2	a 29 2	a 46 2	a 16 2	a 36 2	a 26 2
a 30 2	a 32 2	a 20 2	a 42 2	a 25 2	a 39 2	a 19 2	a 45 2

Carré numérique.

1	63	11	53	8	58	14	52
56	10	62	4	49	15	59	5
18	48	28	38	23	41	29	35
39	25	45	19	34	32	44	22
57	7	51	13	64	2	54	12
16	50	6	60	9	55	3	61
42	24	36	30	47	17	37	27
31	33	21	43	26	40	20	46

Carrés panmagiques du 16e ordre et de symétrie $\frac{1}{4}$.

Carré symbolique.

1_1	16_{15}	2_3	15_{13}	1_5	16_{11}	2_7	15_9	1_{16}	16_2	2_{14}	15_4	1_{12}	16_6	2_{10}	15_8
15_{16}	2_2	16_{14}	1_4	15_{12}	2_6	16_{10}	1_8	15_1	2_{15}	16_3	1_{13}	15_5	2_{11}	16_7	1_9
3_2	14_{16}	4_4	13_{14}	3_6	14_{12}	4_8	13_{10}	3_{15}	14_1	4_{13}	13_3	3_{11}	14_5	4_9	13_7
13_{15}	4_1	14_{13}	3_3	13_{11}	4_5	14_9	3_7	13_2	4_{16}	14_4	3_{14}	13_6	4_{12}	14_8	3_{10}
5_1	12_{15}	6_3	11_{13}	5_5	12_{11}	6_7	11_9	5_{16}	12_2	6_{14}	11_4	5_{12}	12_6	6_{10}	11_8
11_{16}	6_2	12_{14}	5_4	11_{12}	6_6	12_{10}	5_8	11_1	6_{15}	12_3	5_{13}	11_5	6_{11}	12_7	5_9
7_2	10_{16}	8_4	9_{14}	7_6	10_{12}	8_8	9_{10}	7_{15}	10_1	8_{13}	9_3	7_{11}	10_5	8_9	9_7
9_{15}	8_1	10_{13}	7_3	9_{11}	8_5	10_9	7_7	9_2	8_{16}	10_4	7_{14}	9_6	8_{12}	10_8	7_{10}
16_1	1_{15}	15_3	2_{13}	16_5	1_{11}	15_7	2_9	16_{16}	1_2	15_{14}	2_4	16_{12}	1_6	15_{10}	2_8
2_{16}	15_2	1_{14}	16_4	2_{12}	15_6	1_{10}	16_8	2_1	15_{15}	1_3	16_{13}	2_5	15_{11}	1_7	16_9
14_2	3_{16}	13_4	4_{14}	14_6	3_{12}	13_8	4_{10}	14_{15}	3_1	13_{13}	4_3	14_{11}	3_5	13_9	4_7
4_{15}	13_1	3_{13}	14_3	4_{11}	13_5	3_9	14_7	4_2	13_{16}	3_4	14_{14}	4_6	13_{12}	3_8	14_{10}
12_1	5_{15}	11_3	6_{13}	12_5	5_{11}	11_7	6_9	12_{16}	5_2	11_{14}	6_4	12_{12}	5_6	11_{10}	6_8
6_{16}	11_2	5_{14}	12_4	6_{12}	11_6	5_{10}	12_8	6_1	11_{15}	5_3	12_{13}	6_5	11_{11}	5_7	12_9
10_2	7_{16}	9_4	8_{14}	10_6	7_{12}	9_8	8_{10}	10_{15}	7_1	9_{13}	8_3	10_{11}	7_5	9_9	8_7
8_{15}	9_1	7_{13}	10_3	8_{11}	9_5	7_9	10_7	8_2	9_{16}	7_4	10_{14}	8_6	9_{12}	7_8	10_{10}

Carré numérique.

1	255	19	237	5	251	23	233	16	242	30	228	12	246	26	232
240	18	254	4	236	22	250	8	225	31	243	13	229	27	247	9
34	224	52	206	38	220	56	202	47	209	61	195	43	213	57	199
207	49	221	35	203	53	217	39	194	64	212	46	198	60	216	42
65	191	83	173	69	187	87	169	80	178	94	164	76	182	90	168
176	82	190	68	172	86	186	72	161	95	179	77	165	91	183	73
98	160	116	142	102	156	120	138	111	145	125	131	107	149	121	135
143	113	157	99	139	117	153	103	130	128	148	110	134	124	152	106
241	15	227	29	245	11	231	25	256	2	238	20	252	6	234	24
32	226	14	244	28	230	10	248	17	239	3	253	21	235	7	249
210	48	196	62	214	44	200	58	223	33	205	51	219	37	201	55
63	193	45	211	59	197	41	215	50	208	36	222	54	204	40	218
177	79	163	93	181	75	167	89	192	66	174	84	188	70	170	88
96	162	78	180	92	166	74	184	81	175	67	189	85	171	71	185
146	112	132	126	150	108	136	122	159	97	141	115	155	101	137	119
127	129	109	147	123	133	105	151	114	144	100	158	118	140	104	154

k^e HYPOTHÈSE.

Carré symbolique d'ordre $2^{k+1}.n$ *et de symétrie* $\frac{1}{2n}$.

Posons, pour plus de facilité dans la notation, $2^{k+1}.n = m$; nous allons indiquer la composition du carré des premiers indices, c'est-à-dire du carré donnant la manière dont il faut disposer les régiments pour obtenir une solution panmagique :

PREMIÈRE VERTICALE.

$$1; m-1; \quad 3 \quad ; m-3; \quad 5 \quad ; m-5; \cdots\cdots; \frac{m}{2}-1; \frac{m}{2}+1;$$

$$m; \quad 2 \quad ; m-2; \quad 4 \quad ; m-4; \quad 6 \quad ; \cdots\cdots; \frac{m}{2}+2; \frac{m}{2}.$$

PREMIÈRE HORIZONTALE.

Période :

$$1; m; 2; m-1; 3; m-2; 4; m-3; \cdots; 2^{k-1}-1;$$
$$m-2^{k-1}+2; \quad 2^{k-1}; \quad m-2^{k-1}+1.$$

DEUXIÈME HORIZONTALE.

Période :

$$m-1; 2; m; 1; m-3; 4; m-2; 3; \cdots; m-2^{k-1}+1;$$
$$2^{k-1}; \quad m-2^{k-1}+2; \quad 2^{k-1}-1.$$

La suite de ces indices est celle des indices de la première horizontale, les éléments de cette ligne pris 4 à 4 étant écrits en sens contraire.

AUTRES VERTICALES. — Les autres lignes verticales, dont on connaît deux éléments, se déduisent facilement de la première, par symétrie.

Le carré des seconds indices, c'est-à-dire le carré donnant la manière de disposer les grades, est l'inverse du carré des

premiers indices : en d'autres termes, les lignes horizontale de l'un sont les verticales de même rang de l'autre.

Par exemple, si nous prenons $k = 3$ et $n = 1$, nous obtenons le carré suivant :

Carré symbolique d'ordre 16 *et de symétrie* $\frac{1}{2}$.

1_1	16_{15}	2_3	15_{13}	3_5	14_{11}	4_7	13_9	1_{16}	16_2	2_{14}	15_4	3_{12}	14_6	4_{10}	13_8
15_{10}	2_2	16_{14}	1_4	13_{12}	4_6	14_{10}	3_8	15_1	2_{15}	16_3	1_{13}	13_5	4_{11}	14_7	3_9
3_2	14_{16}	4_4	13_{14}	1_6	16_{12}	2_8	15_{10}	3_{15}	14_1	4_{13}	13_3	1_{11}	16_5	2_9	15_7
13_{15}	4_1	14_{13}	3_3	15_{11}	2_5	16_9	1_7	13_2	4_{16}	14_4	3_{14}	15_6	2_{12}	16_8	1_{10}
5_3	12_{13}	6_1	11_{15}	7_7	10_9	8_5	9_{11}	5_{14}	12_4	6_{16}	11_2	7_{10}	10_8	8_{12}	9_6
11_{14}	6_4	12_{16}	5_2	9_{10}	8_8	10_{12}	7_6	11_3	6_{13}	12_1	5_{15}	9_7	8_9	10_5	7_{11}
7_4	10_{14}	8_2	9_{16}	5_8	12_{10}	6_6	11_{12}	7_{13}	10_3	8_{15}	9_1	5_9	12_7	6_{11}	11_5
9_{13}	8_3	10_{15}	7_1	11_9	6_7	12_{11}	5_5	9_4	8_{14}	10_2	7_{16}	11_8	6_{10}	12_6	5_{12}
16_1	1_{15}	15_3	2_{13}	14_5	3_{11}	13_7	4_9	16_{16}	1_2	15_{14}	2_4	14_{12}	3_6	13_{10}	4_8
2_{16}	15_2	1_{14}	16_4	4_{12}	13_6	3_{10}	14_8	2_1	15_{15}	1_3	16_{13}	4_5	13_{11}	3_7	14_9
14_2	3_{16}	13_4	4_{14}	16_6	1_{12}	15_8	2_{10}	14_{15}	3_1	13_{13}	4_3	16_{11}	1_5	15_9	2_7
4_{15}	13_1	3_{13}	14_3	2_{11}	15_5	1_9	16_7	4_2	13_{16}	3_4	14_{14}	2_6	15_{12}	1_8	16_{10}
12_3	5_{13}	11_1	6_{15}	10_7	7_9	9_5	8_{11}	12_{14}	5_4	11_{16}	6_2	10_{10}	7_8	9_{12}	8_6
6_{14}	11_4	5_{16}	12_2	8_{10}	9_8	7_{12}	10_6	6_3	11_{13}	5_1	12_{15}	8_7	9_9	7_5	10_{11}
10_4	7_{14}	9_2	8_{16}	12_8	5_{10}	11_6	6_{12}	10_{13}	7_3	9_{15}	8_1	12_9	5_7	11_{11}	6_5
8_{13}	9_3	7_{15}	10_1	6_9	11_7	5_{11}	12_5	8_4	9_{14}	7_2	10_{16}	6_8	11_{10}	5_6	12_5

Ce carré donne naissance à un panmagique numérique des 256 premiers nombres qu'il est facile de former en remplaçant le symbole s_t par $(s - 1)\ 16 + t$ et à un panmagique littéral (en progression arithmétique) en remplaçant ce même symbole par $a + [(s - 1)\ 16 + (t - 1)]\ r$.

Observation. — Puisqu'il est impossible de disposer en carré $m^2 = \{(2n + 1)2^k\}^2$ officiers de m régiments différents et

de m grades distincts de manière que, sur chaque colonne horizontale et sur chaque colonne verticale, il y ait :

1° m officiers de chaque grade et de chaque régiment, si $k = 1$ et $n \geq 1$,

2° 2^p groupes identiques de $(2n+1)2^{k-p}$ officiers de grades ou de régiments différents, si $k = p \geq 1$ et $n \geq 1$,

nous en concluons qu'il est aussi impossible de former les carrés panmagiques correspondants.

Il existe aussi des carrés panmagiques *dissymétriques*, c'est-à-dire ne répondant pas au problème des 36 officiers d'Euler, problème que nous avons généralisé; voici, pour terminer, un exemple de carré panmagique *symétriquement dissymétrique*, dont chaque ligne horizontale, ainsi que chaque ligne verticale, renferme 16 officiers de 8 régiments différents et de 8 grades distincts :

Carré symbolique.

15_2	1_{16}	4_3	14_{13}	13_4	3_{14}	2_1	16_{15}	2_8	16_{16}	13_3	3_{13}	4_4	14_{14}	15_1	1_{15}
14_{15}	4_1	1_{14}	15_4	16_{13}	2_3	3_{16}	13_2	3_{15}	13_1	16_{14}	2_4	1_{13}	15_3	14_{16}	4_2
9_1	7_{15}	6_4	12_{14}	11_3	5_{13}	8_2	10_{16}	8_1	10_{15}	11_4	5_{14}	6_3	12_{13}	9_2	7_{16}
12_{16}	6_2	7_{13}	9_3	10_{14}	8_4	5_{15}	11_1	5_{16}	11_2	10_{13}	8_3	7_{14}	9_4	12_{15}	6_1
5_8	11_{10}	10_5	8_{11}	7_6	9_{12}	12_7	6_9	12_8	6_{10}	7_5	9_{11}	10_6	8_{12}	5_7	11_9
8_9	10_7	11_{12}	5_6	6_{11}	12_5	9_{10}	7_8	9_9	7_7	6_{12}	12_6	11_{11}	5_5	8_{10}	10_8
3_7	13_9	16_6	2_{12}	1_5	15_{11}	14_8	4_{10}	14_7	4_9	1_6	15_{12}	16_5	2_{11}	3_8	13_{10}
2_{10}	16_8	13_{11}	3_5	4_{12}	14_6	15_9	1_7	15_{10}	1_8	4_{11}	14_5	13_{12}	3_6	2_9	16_7
15_5	1_1	4_{14}	14_4	13_{13}	3_3	2_{16}	16_2	2_{15}	16_1	13_{14}	3_4	4_{13}	14_3	15_{16}	1_2
14_2	4_{16}	1_3	15_{13}	16_4	2_{14}	3_1	13_{15}	3_2	13_{16}	16_3	2_{13}	1_4	15_{14}	14_1	4_{15}
9_{16}	7_2	6_{13}	12_3	11_{14}	5_4	8_{15}	10_1	8_{16}	10_2	11_{13}	5_3	6_{14}	12_4	9_{15}	7_1
12_1	6_{15}	7_4	9_{14}	10_3	8_{13}	5_2	11_{16}	5_1	11_{15}	10_4	8_{14}	7_3	9_{13}	12_2	6_{16}
5_9	11_7	10_{12}	8_6	7_{11}	9_5	12_{10}	6_8	12_9	6_7	7_{12}	9_6	10_{11}	8_5	5_{10}	11_8
8_8	10_{10}	11_5	5_{11}	6_6	12_{12}	9_7	7_9	9_8	7_{10}	6_5	12_{11}	11_6	5_{12}	8_7	10_9
3_{10}	13_8	16_{11}	2_5	1_{12}	15_6	14_9	4_7	14_{10}	4_8	1_{11}	15_5	16_{12}	2_6	3_9	13_7
2_7	16_9	13_6	3_{12}	4_5	14_{11}	15_8	1_{10}	15_7	1_9	4_6	14_{12}	13_5	3_{11}	2_8	16_{10}

Carré numérique.

226	16	51	221	196	46	17	255
223	49	14	228	253	19	48	194
129	111	84	190	163	77	114	160
192	82	109	131	158	116	79	161
72	170	149	123	102	140	183	89
121	151	172	70	91	181	138	104
39	201	246	28	5	235	216	58
26	248	203	37	60	214	233	7

18	256	195	45	52	222	225	15
47	193	254	21	13	227	224	50
113	159	164	78	83	189	130	112
80	162	157	115	110	132	191	81
184	90	101	139	150	134	71	169
137	103	92	182	171	69	122	152
215	57	6	236	245	27	40	202
234	8	59	213	204	38	25	247

234	1	62	212	205	35	32	242
210	64	3	237	244	30	33	207
144	98	93	179	174	68	127	145
177	95	100	149	147	125	66	176
73	167	156	118	107	133	186	88
120	154	165	75	86	188	135	105
42	200	251	21	12	230	217	55
23	249	198	44	53	219	232	10

31	241	206	36	61	211	240	2
34	208	243	29	4	238	209	63
192	146	173	67	94	180	143	97
65	175	148	126	99	141	178	96
185	87	108	134	155	117	74	168
136	106	85	187	166	76	119	153
218	56	11	229	253	22	41	199
231	9	54	220	197	43	24	250

Ce dernier carré renferme, entre autres propriétés, 128 compartiments de 4 cases tels que la somme des nombres qui composent chacun d'eux est constante et égale à 514.

Des conditions de magie horizontale et de magie verticale d'un carré magique d'ordre pair, il résulte que la somme des nombres de chacun des quartiers opposés A et D du carré est la même, ainsi que la somme des nombres des quartiers opposés B et C. Nous avons rencontré des carrés panmagiques symétriques d'ordre pair dont les quartiers A, B, C et D étaient tous égaux; observons, pour terminer, qu'il ne peut exister de tels carrés panmagiques dissymétriques d'ordre $2(2n+1)$ pour $n \geq 1$, car la somme des nombres

$$1, 2, 3, \cdots\cdots, 4(2n+1)^2,$$

qui interviendraient dans ces carrés, n'est pas divisible par 4.

Carrés panmagiques géométriques. — Si, dans les carrés symboliques qui précèdent, on remplace l'élément s_t par $A_s \times a_t$, puis A_s par $r^{(s-1)4n}$ et a_t par ar^{t-1}, on obtient des carrés panmagiques dont les termes sont en progression géométrique; on déduit les propriétés des panmagiques géométriques des propriétés des panmagiques arithmétiques en passant tout simplement du signe d'addition au signe de multiplication.

Liége, mars 1913.

CARRÉ MAGIQUE DU 16^{me} ORDRE

A

SYMÉTRIE COMPLÈTE

PAR

M. ÉDOUARD BARBETTE

CARRÉ MAGIQUE DU 16^{me} ORDRE

A

SYMÉTRIE COMPLÈTE

A_1a_1	A_3a_4	A_4a_2	A_2a_3	A_9a_{13}	$A_{11}a_{16}$	$A_{12}a_{14}$	$A_{10}a_{15}$	$A_{15}a_7$	$A_{13}a_6$	$A_{14}a_8$	$A_{16}a_5$	A_7a_{11}	A_5a_{10}	A_6a_{12}	A_8a_9
A_8a_3	A_2a_2	A_1a_4	A_3a_1	$A_{12}a_{15}$	$A_{10}a_{14}$	A_9a_{16}	$A_{11}a_{13}$	$A_{14}a_5$	$A_{16}a_8$	$A_{15}a_6$	$A_{13}a_7$	A_6a_9	A_8a_{12}	A_7a_{10}	A_5a_{11}
A_2a_4	A_4a_1	A_3a_3	A_1a_2	$A_{10}a_{16}$	$A_{12}a_{13}$	$A_{11}a_{15}$	A_9a_{14}	$A_{16}a_6$	$A_{14}a_7$	$A_{13}a_5$	$A_{15}a_8$	A_8a_{10}	A_6a_{11}	A_5a_9	A_7a_{12}
A_9a_2	A_1a_3	A_2a_1	A_4a_4	$A_{11}a_{14}$	A_9a_{15}	$A_{16}a_{13}$	$A_{12}a_{16}$	$A_{13}a_8$	$A_{15}a_5$	$A_{16}a_7$	$A_{14}a_6$	A_5a_{12}	A_7a_9	A_8a_{11}	A_6a_{10}
$A_{13}a_9$	$A_{15}a_{12}$	$A_{16}a_{10}$	$A_{14}a_{11}$	A_5a_5	A_7a_8	A_8a_6	A_6a_7	A_3a_{15}	A_1a_{14}	A_2a_{16}	A_4a_{13}	$A_{11}a_3$	A_9a_2	$A_{10}a_4$	$A_{12}a_1$
$A_{16}a_{11}$	$A_{14}a_{10}$	$A_{13}a_{12}$	$A_{15}a_9$	A_8a_7	A_6a_6	A_5a_8	A_7a_5	A_2a_{13}	A_4a_{16}	A_3a_{14}	A_1a_{15}	$A_{10}a_1$	$A_{12}a_4$	$A_{11}a_2$	A_9a_3
$A_{14}a_{18}$	$A_{16}a_9$	$A_{15}a_{11}$	$A_{13}a_{10}$	A_6a_8	A_8a_5	A_7a_7	A_5a_6	A_4a_{14}	A_2a_{15}	A_1a_{13}	A_3a_{16}	$A_{12}a_2$	$A_{10}a_3$	A_9a_1	$A_{11}a_4$
$A_{15}a_{10}$	$A_{13}a_{11}$	$A_{14}a_9$	$A_{16}a_{12}$	A_7a_6	A_5a_7	A_6a_5	A_8a_8	A_1a_{16}	A_3a_{13}	A_4a_{15}	A_2a_{14}	A_9a_4	$A_{11}a_1$	$A_{12}a_3$	$A_{10}a_2$
A_7a_{15}	A_5a_{14}	A_6a_{16}	A_8a_{13}	$A_{15}a_3$	$A_{13}a_2$	$A_{14}a_4$	$A_{16}a_1$	A_9a_9	$A_{11}a_{12}$	$A_{12}a_{10}$	$A_{10}a_{11}$	A_1a_5	A_3a_8	A_4a_6	A_2a_7
A_6a_{13}	A_8a_{16}	A_7a_{14}	A_5a_{15}	$A_{14}a_1$	$A_{16}a_4$	$A_{15}a_2$	$A_{13}a_3$	$A_{12}a_{11}$	$A_{10}a_{10}$	A_9a_{12}	$A_{11}a_9$	A_4a_7	A_2a_6	A_1a_8	A_3a_5
A_8a_{14}	A_6a_{15}	A_5a_{13}	A_7a_{16}	$A_{16}a_2$	$A_{14}a_3$	$A_{13}a_1$	$A_{15}a_4$	$A_{10}a_{12}$	$A_{12}a_9$	$A_{11}a_{11}$	A_9a_{10}	A_2a_8	A_4a_5	A_3a_7	A_1a_6
A_5a_{16}	A_7a_{13}	A_8a_{15}	A_6a_{14}	$A_{13}a_4$	$A_{15}a_1$	$A_{16}a_3$	$A_{14}a_2$	$A_{11}a_{10}$	A_9a_{11}	$A_{10}a_9$	$A_{12}a_{12}$	A_3a_6	A_1a_7	A_2a_5	A_4a_8
$A_{11}a_7$	A_9a_6	$A_{16}a_8$	$A_{12}a_5$	A_3a_{11}	A_1a_{10}	A_2a_{12}	A_4a_9	A_5a_1	A_7a_4	A_8a_2	A_6a_3	$A_{13}a_{13}$	$A_{15}a_{16}$	$A_{16}a_{14}$	$A_{14}a_{15}$
$A_{10}a_5$	$A_{12}a_8$	$A_{11}a_6$	A_9a_7	A_2a_9	A_4a_{12}	A_3a_{10}	A_1a_{11}	A_8a_3	A_6a_2	A_5a_4	A_7a_1	$A_{16}a_{15}$	$A_{14}a_{16}$	$A_{13}a_{16}$	$A_{15}a_{13}$
$A_{12}a_6$	$A_{10}a_7$	A_9a_5	$A_{11}a_8$	A_4a_{10}	A_2a_{11}	A_1a_9	A_3a_{12}	A_6a_4	A_8a_1	A_7a_3	A_5a_2	$A_{14}a_{16}$	$A_{16}a_{13}$	$A_{15}a_{15}$	$A_{13}a_{14}$
A_9a_8	$A_{11}a_5$	$A_{12}a_7$	$A_{10}a_6$	A_1a_{12}	A_3a_9	A_4a_{11}	A_2a_{10}	A_7a_2	A_5a_3	A_6a_1	A_8a_4	$A_{15}a_{14}$	$A_{13}a_{15}$	$A_{14}a_{13}$	$A_{16}a_{16}$

Ce carré donne une solution du problème des 36 officiers d'Euler étendu à 16² officiers, A_ra_s représentant un officier de régiment r et de grade s : chacune des lignes horizontales,

comme chacune des lignes verticales, renferme 16 officiers de régiments différents et de grades différents; les deux diagonales possèdent en plus la même propriété.

Si l'on y remplace l'élément $A_r a_s$ par $(A_r + a_s)$, la somme des éléments de chacune des bandes horizontales, de chacune des bandes verticales et de chacune des deux diagonales est constante. Si, de plus, on y fait

$$A_1 = 0;\ A_2 = 16r;\ A_3 = 32r;\ \ldots;\ A_{16} = 240r$$

et

$$a_1 = a;\ a_2 = a + r;\ a_3 = a + 2r;\ \ldots;\ a_{16} = a + 15r,$$

on obtient un carré magique renfermant les termes suivants, en progression arithmétique :

$$a;\ a + r;\ a + 2r;\ a + 3r;\ \ldots;\ a + 255r:$$

enfin si, dans ce dernier carré, on prend $a = 1$ et $r = 1$, on obtient un carré magique des 256 premiers nombres de constante 2056.

Ajoutons, pour terminer, que le carré donné est *géométrique :* le produit des éléments de chacune des lignes horizontales, de chacune des lignes verticales et de chacune des deux diagonales est constant. Si l'on y fait

$$A_1 = 1;\ A_2 = r^{16};\ A_3 = r^{32};\ \ldots;\ A_{16} = r^{240}$$
$$a_1 = a;\ a_2 = ar;\ a_3 = ar^2;\ \ldots;\ a_{16} = ar^{15},$$

on obtient un carré magique géométrique, dont les termes sont en progression géométrique et dont la constante est $a^{16}r^{2040}$.

Le problème général, pour m^2 éléments, se trouve traité dans l'ouvrage que je viens de faire paraître sous le titre : *Les carrés magiques du m^e ordre*.

SUR

LA COMPENSATION DES ANGLES

D'UN

QUADRILATÈRE

PAR

M. KRAÏTCHIK

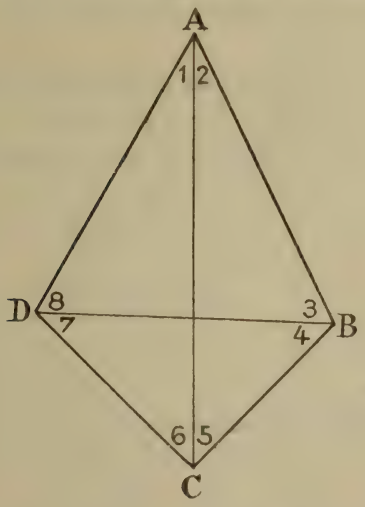
INGÉNIEUR, DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

SUR

LA COMPENSATION DES ANGLES

D'UN QUADRILATÈRE

Désignons par a_i la valeur observée de l'angle i ($i = 1, 2, 3,$



4, 5, 6, 7, 8), les angles étant numérotés dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

On aura les relations suivantes entre les valeurs exactes des angles a_i :

$$\left.\begin{aligned} a_8 + a_1 + a_2 + a_3 &= 180^\circ, \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 180^\circ, \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= 180^\circ, \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_1 &= 180^\circ, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7 = \sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8 \ (*). \quad (2)$$

En général, les valeurs observées a_i ... des angles ne satisfont pas aux relations (1). Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les erreurs de fermeture des quatre triangles DAB, ABC, BCD, CDA, et y_i la correction de la valeur de a_i, en vue de satisfaire aux relations (1), c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= a_8 + a_1 + a_2 + a_3 - 180^\circ \text{ ou } y_8 + y_1 + y_2 + y_3 = -C_1, \\ C_2 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 180^\circ \text{ » } y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = -C_2, \\ C_3 &= a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - 180^\circ \text{ » } y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = -C_3, \\ C_4 &= a_6 + a_7 + a_8 + a_1 - 180^\circ \text{ » } y_6 + y_7 + y_8 + y_1 = -C_4. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Les équations (3) ne forment que trois équations distinctes, car les erreurs de fermeture ne sont pas indépendantes ($C_1 + C_3 = C_2 + C_4$).

Cependant, on ne peut pas prendre cinq valeurs de y_i arbitraires pour en déduire les trois autres, car les différents déterminants du 3me ordre qu'on peut déduire du tableau

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

sont nuls

(*) Pour démontrer cette relation, on écrit les proportions connues et on les multiplie membre à membre :

$$\frac{DC}{\sin a_1} = \frac{DA}{\sin a_6}, \quad \frac{DA}{\sin a_3} = \frac{AB}{\sin a_8}, \quad \frac{AB}{\sin a_5} = \frac{BC}{\sin a_2}, \quad \frac{BC}{\sin a_7} = \frac{CD}{\sin a_4}$$

La relation (2) tient implicitement compte de la grandeur des côtés du quadrilatère. C'est pourquoi elle est dite « relation due aux côtés ».

1° Il serait logique de supposer que y_i est une fonction linéaire de deux valeurs de C se rapportant aux deux triangles qui renferment cet angle, c'est-à-dire de poser

$$y_1 = kC_4 + lC_1, \quad y_2 = kC_2 + lC_4, \quad y_3 = kC_1 + lC_2, \quad y_4 = kC_3 + lC_2,$$
$$y_5 = kC_2 + lC_3, \quad y_6 = kC_4 + lC_3, \quad y_7 = kC_3 + lC_4, \quad y_8 = kC_1 + lC_4.$$

En substituant ces valeurs dans $y_8 + y_1 + y_2 + y_3 = -C_1$, on aura

$$k(2C_1 + C_2 + C_4) + l(2C_1 + C_2 + C_4) = -C_1$$

ou

$$(k + l)\ (2C_1 + C_2 + C_4) = -C_1$$

ou, puisque

$$C_1 + C_3 = C_2 + C_4,$$
$$(k + l)\ (3C_1 + C_3) = -C_1;$$

de même les autres équations donneront

$$(k + l)\ (3C_2 + C_4) = -C_2,$$
$$(k + l)\ (3C_3 + C_1) = -C_3,$$
$$(k + l)\ (3C_4 + C_2) = -C_4,$$

système, en général, incompatible.

2° On peut admettre que chaque correction y_i est une fonction linéaire de deux erreurs de fermeture de deux triangles dont l'un contient l'angle en question, et l'autre est formé par les trois sommets restants. Ainsi

$$y_1 = kC_4 + lC_3, \quad y_2 = kC_2 + lC_3, \quad y_3 = kC_1 + lC_4, \quad y_4 = kC_3 + lC_4,$$
$$y_5 = kC_2 + lC_1, \quad y_6 = kC_4 + lC_1, \quad y_7 = kC_3 + lC_2, \quad y_8 = kC_1 + lC_2.$$

Le système (3) devient

$$\begin{aligned}
k(3C_1 + C_3) + l(3C_3 + C_1) &= -C_1,\\
k(3C_2 + C_4) + l(3C_4 + C_2) &= -C_2,\\
k(3C_3 + C_1) + l(3C_1 + C_3) &= -C_3,\\
k(3C_4 + C_2) + l(3C_2 + C_4) &= -C_4.
\end{aligned}$$

En ajoutant la première et la troisième (ou la 2e et la 4e), on obtient

$$4k + 4l = -1.$$

En les retranchant, on aura

$$-2k + 2l = -1,$$

d'où

$$\frac{k}{-3} = \frac{l}{1} = \frac{1}{8}.$$

Ainsi on peut adopter

$$\left.\begin{aligned}
&8y_1 = -3C_1 + C_3, \quad 8y_2 = -3C_2 + C_3, \quad 8y_3 = -3C_1 + C_4,\\
&\qquad\qquad 8y_4 = -3C_3 + C_4,\\
&8y_5 = -3C_2 + C_1, \quad 8y_6 = -3C_4 + C_1, \quad 8y_7 = -3C_3 + C_2,\\
&\qquad\qquad 8y_8 = -3C_1 + C_2.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Les angles corrigés $a'_i = a_i + y_i$ sont tels que les nouvelles erreurs de fermeture sont nulles, les relations (1) étant vérifiées.

En général, la relation (2) n'est pas vérifiée. On peut l'écrire :

$$\begin{aligned}
&lg \sin a'_1 + lg \sin a'_3 + lg \sin a'_5 + lg \sin a'_7\\
&= lg \sin a'_2 + lg \sin a'_4 + lg \sin a'_6 + lg \sin a'_8.
\end{aligned}$$

Soit

$$D = \Sigma lg \sin a'_{2j-1} - \Sigma lg \sin a'_{2j} \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

et Δ_i les différences tabulaires de $lg \sin a'_i$ par 1'' ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$). Soit encore

$$q = \frac{\Sigma \Delta_i^2}{D}.$$

Les corrections

$$z_i = (-1)^i \frac{\Delta_i}{q} \qquad (5)$$

appliquées aux angles a'_i auront pour effet de rendre $D = 0$, comme l'exige (2).

D'après (5), la correction z_i (en secondes) est positive (ou négative) pour tous les angles de rang pair (ou impair) et négative (ou positive) pour tous les angles de rang impair (ou pair) suivant que D est positif ou négatif.

Cependant, dans le cas d'un angle a_i compris entre 90° et 180°, le signe de z_i doit être changé, car le sin décroît quand l'angle croît entre 90 et 180°.

Après avoir corrigé les angles a'_i de la quantité z_i, on constate que la relation (2) est vérifiée, mais (1) n'existe plus. Les deux corrections agissent sur a_i au détriment l'une de l'autre. Cependant les erreurs de fermeture diminuent, donc les nouvelles valeurs sont plus rapprochées des valeurs exactes.

Comme dans la méthode des approximations successives, on répète sur les nouvelles valeurs $a'_i + z_i$ le même calcul pour en déduire des nouvelles valeurs encore plus rapprochées, les erreurs de fermeture et les $D = \Sigma lg \sin a_{2j-1} - \Sigma lg \sin a_{2j}$ diminuant continuellement.

En pratique, deux applications de cette méthode donnent des valeurs assez rapprochées des valeurs exactes pour pouvoir les remplacer.

Exemple numérique :

Compenser à moins de 0″,1 les angles

$$\begin{aligned} a_1 &= 11°10'01''8, & a_5 &= 14°18'01''7, \\ a_2 &= 16°59'04''2, & a_6 &= 17°05'00''4, \\ a_3 &= 103°44'16''2, & a_7 &= 103°38'35''7, \\ a_4 &= 44°58'19''6, & a_8 &= 48°06'27''6. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} C_1 &= -10''2, & C_2 &= -18''3, \\ C_3 &= -2''6, & C_4 &= +5''5, \\ C_1 + C_3 &= -12''8 = & & -12''8 = C_2 + C_4. \end{aligned}$$

On dispose le calcul de la manière ci-contre (voir tableau, p. 9).

Dans la deuxième colonne sont inscrites les valeurs observées. Dans la troisième, les corrections telles qu'elles résultent des formules (4); dans la colonne suivante, les valeurs corrigées des angles. On n'a recopié que les secondes. On a relevé la somme de ces colonnes en vue de vérification. La différence de 0″,2 provient de ce qu'on a négligé dans les corrections les décimales donnant les centièmes d'une seconde.

Dans la colonne suivante, on a inscrit les log sin des angles corrigés dans deux colonnes pour les angles de rang pair et impair. On trouve D = 1026 (dix-millionièmes).

Puis on trouve $\Sigma\Delta^2 = 28494$, $q = 27.8$.

Les corrections pour les côtés sont inscrites dans l'avant-dernière colonne.

On répète la même opération avec les valeurs corrigées (voir tableau, p. 10).

Les nouvelles erreurs de fermeture sont :

$$\begin{aligned} C_1 &= -0''6, & C_2 &= +0''5, \\ C_3 &= +0''4, & C_4 &= -0''7. \end{aligned}$$

Angle.	Valeur observée.	Correction.	Valeur corrigée.	*lg* sin		$\Delta lg \sin /_{1''}$	Δ^2	Correction pour les côtés.	Valeur corrigée.
1	11°10′01″8	— 2″4	59″4	9.2870416		106.6	11363.56	— 3″9	11°09′55″5
2	16°59′04″2	+ 6″5	10″7		9.4655956	69.0	4761	+ 2″5	16°59′13″2
3	103°44′16″2	+ 4″5	20″7	9.9873924		5 1	26 01	+ 0″2	103°44′20″9
4	44°58′19″6	+ 1″7	21″3		9.8492770	21.1	445.21	+ 0″8	44°58′22″1
5	14°18′01″7	+ 5″6	07″3	9.3927555		82.6	6822 76	— 3″0	14°18′04″3
6	17°05′00″4	— 3″5	56″9		9.4679747	68 5	4692.25	+ 2″5	17°04′59″4
7	103°38′35″7	— 1″3	34″4	9.9875701		5.1	26.01	+ 0″2	103°38′34″6
8	48°06′27″6	+ 1″5	29″1		9.8718097	18.9	357.21	+ 0″7	48°06′29″8
	360° — 12″8	+ 12″6	— 0″2	6547596	6546570		28494		
				D = 7596 — 6570 = 1026					

$q = 28{,}494 : 1{,}026 = 27{,}8$

Angle.	Valeur observée.	Correction.	Valeur corrigée.	*lg* sin		Correction pour les côtés.	Valeur corrigée.
1	11°09′55″5	+ 0″3	55″8	0032		+ 0″1	11°09′55″9
2	16°59′13″2	— 0″1	13″1		6122	0″0	16°59′13″1
3	103°44′20″9	+ 0″1	21″0	3923		0″0	103°44′21″0
4	44°58′22″1	— 0″2	21″9		2783	0″0	44°58′21″9
5	14°18′04″3	— 0″3	04″0	7282		+ 0″1	14°18′04″1
6	17°04′59″4	+ 0″2	59″6		9933	0″0	17°04′59″6
7	103°38′34″6	— 0″1	34″5	5700		0″0	103°38′34″5
8	48°06′29″8	+ 0″3	30″1		8116	0″0	48°06′30″1
	360° — 0″2	+ 0″2	0″0	6937	6954		360° + 0″2
				D = 6937 — 6954 = — 17			

Pour les log sin, on n'a besoin que des quatre derniers chiffres, car les angles sont peu modifiés pour affecter les premiers chiffres. On n'a pas besoin de recopier les deux colonnes intitulées $\Delta lg \sin 1''$ et Δ^2, car ces colonnes ne sont pas modifiées.

Les valeurs définitives sont inscrites dans la dernière colonne.

L'erreur de fermeture ne dépasse plus $0''{,}1$.

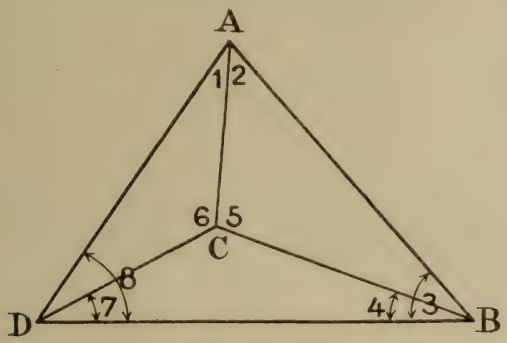
On trouve

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0''1.$$

Ces valeurs peuvent être admises pour les valeurs exactes à $0''{,}1$ près.

REMARQUE.

Toutes les formules restent applicables à un quadrilatère concave, sauf quelques changements de signe dans (1) et (3), pourvu qu'on numérote les angles comme ci-contre.



LES

ACTIONS PONDÉROMOTRICES

DES

CORPS ÉLECTRISÉS

PAR LE

Dr S. PIENKOWSKI

Mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique
dans la séance du 17 décembre 1912

LES

ACTIONS PONDÉROMOTRICES

DES CORPS ÉLECTRISÉS

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

Recherches qualitatives.

§ 1. — Toutes les recherches historiques confirment que la première observation d'un phénomène électrique fut celle de l'attraction des corps légers par l'ambre frotté; le fait a été constaté par Thalès, de Milet, l'un des sept sages de la Grèce (640-548 av. J.-C.). Ce phénomène est resté absolument isolé pendant plusieurs siècles et on l'a attribué exclusivement à l'ambre jaune comme étant sa propriété particulière.

Quelques centaines d'années plus tard, cette propriété a été aussi observée pour le lynkurion par Théophraste (né à Érèse 371-286 av. J.-C.); toutefois on ne peut préciser quel était le minéral désigné par le nom lynkurion. Théophraste dit, de plus, que le lynkurion attire non seulement la paille et les brins de bois, mais encore les morceaux de cuivre et de fer.

Dans les écrits de Pline, notamment dans son histoire naturelle, on retrouve que le minéral carbunculus possède la propriété d'attirer les corps légers après avoir être frotté. Pline a remarqué que la même propriété apparaît lorsque le minéral est simplement chauffé au soleil. On ignore aussi quel est le minéral désigné par Pline par le nom de carbunculus; il est pourtant probable qu'il s'agit de la tourmaline (*).

§ 2. — Un progrès n'est réalisé que seulement au XVI^e^ siècle à la suite des recherches de William Gilbert (**), qui prouva que la propriété d'attirer les corps après le frottement appartient à une classe très étendue de substances, parmi lesquelles il mentionne (***) le verre, la cire, le soufre, la colophane, le sel marin et de multiples pierres précieuses. Il a montré, de plus, que le frottement est nécessaire pour faire apparaître l'attraction et que certains corps ne sont pas capables d'être électrisés, notamment les métaux qui ne s'électrisent pas par le frottement.

Versé dans l'étude du magnétisme, il appliqua la même méthode à l'étude de l'attraction électrique. Il fixa une tige de trois à quatre pouces de longueur sur une pointe, ce qui permit à la tige d'osciller librement ainsi qu'une aiguille aimantée. En approchant les corps frottés, il constatait la déviation de la tige. De cette façon, il a pu constater que tous les métaux, le bois, les pierres, etc., subissent l'attraction électrique. Pour l'étude des liquides, il suspendait une gouttelette à un corps sec et, en approchant le corps frotté, il observait que la gouttelette sphérique prenait la forme d'un cône, dont le sommet était dirigé vers le corps électrisé. Dès lors il classa tous les liquides parmi les corps qui sont attirés par un corps électrisé. Au contraire, les corps incandescents,

---

(*) J. C. Poggendorff, *Geschichte der Physik*, p. 34.

(**) Gilbert ou Gilberd, né à Colchester (1540-1603).

(***) Giulielmi Gilberti, *De Magnete, Magneticisque corporibus, et de magno magnete tellure*. London, 1600.

les gaz, les flammes ne seraient pas, d'après Gilbert, influencés. Il a remarqué pourtant qu'une fumée épaisse est sensiblement attirée (*).

En comparant les actions magnétiques et électriques, il constata que l'attraction électrique était promptement détruite par l'interposition d'écrans, tandis que l'attraction magnétique n'était pas influencée.

Il est étonnant que Gilbert, travaillant avec l'électricité de deux signes du verre (+) et du soufre (—), n'ait pas remarqué la force répulsive, mais cela s'explique par le fait qu'il soumettait toujours un corps non électrisé à l'action d'un corps électrisé ; c'était donc l'action des charges induites qui se manifestait dans tous les cas.

Gilbert expliquait les phénomènes observés par la présence d'une sorte d'atmosphère matérielle entourant les corps électrisés, qui serait libérée par le frottement. Pour lui, la matière ne pouvait pas agir là où elle n'existait, et puisque un corps électrisé attire les corps qui l'environnent, il doit être entouré d'une atmosphère matérielle (**). Le phénomène d'attraction lui apparaissait analogue à celui de l'attraction des corps par la terre, et il assignait à l'air le rôle de fluide, dont le mouvement serait la cause de l'attraction dans ce dernier cas. Ces idées ont été soutenues aussi par d'autres contemporains de Gilbert, notamment par Nicolas Cobeo, Sir Kevelen Digby, Robert Boyle et d'autres. Certains écrivains d'époque imaginaient la présence d'effluves formant des tourbillons autour des corps électrisés.

Les recherches de Gilbert furent reprises par Nicolas Cabeo (***), qui a ajouté les noms de quelques corps capables

---

(*) Johan Carl Fischer, *Geschichte der Physik*, p. 239, Bd. II, Göttingen, 1802.

(**) E. T. Whithaker, *A history of the theories of aether and electricity*. Dublin, 1910, p. 30.

(***) *Philosophia magnetica, inqua magnetis natura penitus explicatur...* ; autore Nicolao Cabeo Ferrariensi, Societ. Jesu, Coloniae, apud Joannem Kinckium anno MDDXXXIV.

d'être électrisés par frottement à la série étudiée par Gilbert : c'est le cas, par exemple, pour la cire blanche et le gypse.

Cette liste a été encore allongée par Robert Boyle (1627-1691), qui montra, de plus, que l'action attractive ne dépendait pas de l'air, car en plaçant l'ambre dans un vase d'où il extrayait l'air, il observait les mêmes effets.

On suppose (*) que Cabeo fut le premier qui ait observé une répulsion des corps légers après qu'ils étaient d'abord attirés.

Pourtant Poggendorff affirme (**) que ni Cabeo ni les physiciens florentins, étudiant après lui les phénomènes électriques, ne parlèrent que de l'attraction.

La répulsion, sûrement constatée comme due à une électrisation, a été reconnue par Otto von Guericke (***), qui avait produit des quantités plus considérables d'électricité au moyen d'un globe en soufre tournant autour d'un axe. D'autre part, Hawksbee, quoiqu'il disposât aussi de charges assez grandes et de signes différents, produites par le frottement avec la main sur des sphères tournantes de susbstances différentes, n'a pas observé la répulsion, quoiqu'il ait été un observateur remarquable, ainsi que le montrent ses travaux (iv).

C'est seulement après la mort de Hawksbee (1713), que la science électrique s'enrichit par les recherches de Stephan Gray (1736) et, au point de vue des forces pondéromotrices, il est à noter l'observation que l'action électrique s'exerce à travers le vide, ce qui avait été déjà constaté par une autre expérience par Boyle, et qu'elle n'est pas empêchée par un aimant.

(*) E. Withaker, *A history of the theories of aether and electricity*, p. 31. « ... Nicolo Cabeo an Italian Jesuit who was perhaps the first to observe that electrified bodies repet as well as attract. »

(**) J. C. Poggendorff, *Geschichte der Physik*, p. 832.

(***) Ottonis de Guericke, *Experimenta nova (ut vocantur) magdeburgia*. Amsterdam, 1672.

(iv) Hawksbee, *Physico-mechanical experiments*. London, 1709.

Dans l'entretemps apparaît l'ouvrage de 's Gravesande (*), où cet auteur attribue les phénomènes électriques à des vibrations produites par le frottement dans un fluide qu'il suppose inséparable des corps électrisables. Le verre contiendrait à l'intérieur et autour de sa surface, d'après 's Gravesande, une certaine atmosphère qui, par le frottement, est mise en vibration : ce qui est la cause de l'attraction et de la répulsion des corps électrisés. Le frottement dérange l'état d'équilibre des particules, qui, à cause de leur élasticité, entrent en vibration et communiquent leur mouvement au fluide environnant.

Dans la suite, on en revient à imaginer des mouvements tourbillonnaires de ce fluide. Citons comme défenseur ardent de cette idée Jean-Théophile Desaguliers. Il y a plus. On voit les tourbillons qui ne constituent plus une supposition, mais une réalité accessible à nos sens (**). On en trouve facilement la preuve dans le fait qu'en approchant un corps électrisé du visage, on éprouve la même sensation que si l'on avait rencontré un fil d'araignée.

§ 3. — Les recherches de Stephan Gray avaient attiré l'attention de ses contemporains sur les phénomènes électriques, et ce sont surtout les travaux de Charles-François du Fay (1698-1739) qui firent alors progresser la science électrique. A la suite de ses recherches (***), il formula clairement et envisagea dans toute leur généralité les lois qualitatives des actions électriques. C'est le même auteur qui a établi le premier l'attraction des corps chargés d'électricité de deux noms et ce fait lui a permis d'établir la distinction de deux espèces d'électricité.

Il énonça clairement qu'un corps électrisé attire tous les corps qui ne le sont pas, mais lorsque ces derniers touchent le

---

(*) Wilhelm Jacob s'Gravesande, *Physices elementa mathematica experimentis confirmata*. Leyden, 1720.

(**) *Histoire de l'Académie royale des sciences*. Paris, 1733, p. 6.

(***) *Mémoires de l'Académie des sciences*. Paris, 1733, pp. 23, 73, 233, 457; 1734, pp. 341, 503; 1737, p. 86. — *Phil. Trans.*, 1734, XXXVIII, p. 258.

corps électrisé, l'électricité se répand sur les deux corps et ils se repoussent. Du Fay attribuait les actions mécaniques à la présence des tourbillons d'un fluide subtil qui se trouve dans l'espace entourant le corps électrisé. Une feuille d'or rapprochée vers un tube en verre électrisé serait enveloppée par ces tourbillons et ainsi attirée, mais au moment du contact elle acquerrait elle-même des propriétés électriques et s'entourerait de ses propres tourbillons. Deux systèmes de tourbillons tendant tous les deux à s'étendre se repousseraient et, puisque l'électrisation du tube est plus forte, ce serait la feuille d'or qui serait repoussée. Il était donc certain pour du Fay qu'un corps électrisé par contact avec un autre est repoussé par ce dernier, mais il alla plus loin et il s'est demandé s'il serait également repoussé par un autre corps électrisé (*) et si deux corps de diverses natures étant électrisés ne diffèrent que par l'intensité de leur électrisation. Pour résoudre ce problème, il avait chargé la feuille d'or par contact avec un tube de verre électrisé et en rapprochant un morceau de copal préalablement frotté, il avait constaté que la feuille d'or, au lieu d'être repoussée, était attirée. En poursuivant ces recherches, il constata que lorsque la feuille d'or est électrisée par contact avec le verre frotté, elle était attirée par toutes les substances résineuses électrisées et qu'elle était repoussée par ces dernières lorsqu'elle était attirée par le verre. Il y a donc, conclut-il, deux électricités de natures différentes, et les corps possédant l'électricité de même nature se repoussent, tandis que ceux possédant l'électricité de nature différente s'attirent. Pour les distinguer, il leur avait donné les noms d'électricité vitreuse et résineuse.

Cette distinction nette de deux espèces d'électricité et l'énoncé clair des lois générales de leurs actions mutuelles firent époque dans la science électrique.

Plus tard, Jean-Théophile Desaguliers (1683-1744) continua

(*) *Mémoires de l'Académie*, 1733, p. 464.

les recherches expérimentales (*) et montra, d'une façon ingénieuse, l'attraction subie par l'eau en faisant dévier la veine liquide par rapprochement d'un tube de verre électrisé.

Dans la première moitié du XVIII^e siècle, l'abbé Jean-Antoine Nollet publia divers mémoires sur les phénomènes électriques et leur a donné l'explication qui était en vogue dans son temps, bien qu'elle fût de beaucoup inférieure à celle de du Fay. Nollet supposait que les phénomènes électriques sont dus au mouvement d'un fluide très subtil, toujours présent dans tous les corps (**). Le frottement aurait pour effet de faire écouler le fluide à travers les pores du corps; le fluide retournerait dans le corps par un autre courant. En plaçant un corps léger soit dans l'un, soit dans l'autre de ces courants, on observerait l'attraction ou la répulsion. Ces idées ne pouvaient pas résister à l'épreuve de l'expérience, et bientôt les travaux de Benjamin Franklin (1706-1790) en montrèrent l'impossibilité.

La théorie d'un seul fluide, dont les premières idées ont été émises par William Watson (1715-1787), qui attribuait les actions électriques (***) à la présence d'un « éther électrique », a été d'une façon indépendante développée par Franklin, qui n'avait pas eu connaissance des travaux de Watson. Franklin admettait que les particules du fluide électrique se repoussent, mais qu'elles sont attirées fortement par la matière. L'électricité vitreuse étant due au surplus de fluide et résineuse à un manque de celui-ci, l'attraction des corps chargés de deux électricités différentes et la répulsion de ceux chargés d'électricité vitreuse devenait compréhensible. Mais l'expérience montra que les corps possédant la charge résineuse se repoussent aussi. Ce fait restait inexplicable en s'en tenant aux deux propriétés assignées au fluide électrique. Puisque l'action entre les corps

---

(*) Desaguliers, *A curse of experimental philosophy*, 2 vol. in-4°. London, 1734.

(**) Nollet, *Recherches*, 1749, p. 245.

(***) *Phil. Trans.*, 1746, p. 718.

électrisés se manifestait également lorsque ces corps ne se touchaient pas, le fluide en question devait former une « atmosphère électrique » (*) entourant les corps et qui se maintenait dans leur voisinage par l'action attractive de la matière. Il remarque (**) que l'air n'a pas d'influence et n'est pas lui-même influencé par le fluide électrique, car le courant d'air sec ne l'enlevait pas et ne dérangeait en rien les actions attractives et répulsives.

Étant amené, par l'étude de la bouteille de Leyde, à considérer le verre comme impénétrable pour le fluide électrique, il lui était impossible de se rendre compte du fait que l'attraction électrique n'était pas détruite par interposition d'une plaque en verre entre les corps agissants. Il fut donc conduit à supposer (***) que la surface voisine du corps électrisé était excitée directement et qu'elle était à son tour capable d'exercer une influence sur l'autre surface à travers le verre, et que c'était à l'action de cette dernière qu'on devait l'attraction observée.

On voit clairement dans la pensée de Franklin, qu'il ne songait pas à l'action à distance. Au contraire, il imaginait que le fluide électrique se répandait en une « atmosphère », pour produire un effort mécanique qui ne pouvait se manifester que là où elle existait.

Dans le cas de l'action à travers le verre, il imaginait l'induction de charge sur deux surfaces, tant l'action directe à distance était étrangère à son esprit. Mais l'idée de la possibilité d'une telle action à travers un milieu qui était considéré comme impénétrable au fluide et l'hypothèse d'une action répulsive entre les particules de fluide, amenaient implicitement la conception d'une action à distance qui commença à se développer après Franklin.

La supposition de Franklin que le verre est impénétrable

(*) *New Experiments*, 1750, §15.
(**) *Letter*, VII, 1751.
(***) *New Experiments*, 1750, § 34.

au fluide électrique a été généralisée par François Ulrich Théodore Aepinus (1724-1802) et son collaborateur Johann Carl Wilcke (1732-1796) à tous les corps non conducteurs. Son adoption même pour l'air a été faite à la suite de la production du condensateur plan avec la couche d'air à la place du verre. Comme conséquence logique on dut alors admettre que l'atmosphère électrique de Franklin entourant les corps électrisés n'existait pas, car le fluide ne pénétrait pas dans l'air.

D'autre part, l'expérience de Stephan Gray montrant que la charge d'un parallélipipède plein et d'une boîte de même forme et de mêmes dimensions, était la même, avait conduit Aepinus à l'idée précise que le fluide ne se trouve qu'à la surface des conducteurs et exerce une action directe à distance.

Ce passage des idées de Franklin à celles d'Aepinus est très intéressant au point de vue du développement de la théorie. On voit comment une simple hypothèse de Franklin concernant l'impénétrabilité du verre dans une bouteille de Leyde, a conduit fatalement à l'idée de la nécessité d'une action à distance.

Aepinus, supposant avec Franklin que les particules d'électricité vitreuse se repoussent mutuellement et sont attirées par la matière, avait admis encore pour rendre compte de la répulsion des charges résineuses, que les particules de la matière se repoussent. La force s'exerçant entre deux corps était donc toujours la résultante des actions du fluide électrique de deux corps, de l'action de ceux-ci sur la matière et enfin de l'action mutuelle des particules matérielles.

Dans ses recherches, il s'aperçut que les forces attractive et répulsive varient avec la distance entre les corps électrisés, et il supposait qu'elles diminuaient à mesure que la distance augmente, mais il n'avait pas pu déterminer la loi de cette variation.

CHAPITRE II.

Établissement de la loi élémentaire.

§ 4. — Comme je l'ai mentionné plus haut, Aepinus s'occupait de la loi de variation de la force en fonction de la distance entre les corps électrisés, mais n'avait donné aucune indication quantitative.

Déjà en 1760, Daniel Bernouilli supposait (*) que l'attraction électrique varie en raison inverse des carrés des distances, mais l'indication plus précise en fut donnée par Joseph Pristley (1733-1804).

Pristley étant un ami de Franklin, avait fait, à sa demande, l'expérience qui est maintenant considérée comme la preuve la plus certaine de l'exactitude de la loi de Coulomb. Franklin fit savoir à Pristley que l'expérience lui avait montré qu'une balle en liège, placée à l'intérieur d'un vase métallique électrisé, n'est nullement influencée par la charge de celui-ci, et lui demanda de répéter cette expérience en lui laissant la liberté de la rendre publique.

Le 21 décembre 1766, Pristley électrisa (**) un vase métallique placé sur un support en bois desséché, et il observa qu'une couple de balles de sureau suspendues à l'extrémité d'un bâton de verre étaient, à l'extérieur du vase, fortement attirées, tandis qu'elles restaient non influencées quand elles étaient plongées à l'intérieur du vase. Poursuivant l'expérience, il chercha si l'électricité se trouvait à l'intérieur du vase. Il constata qu'au fond du vase il n'y en a pas, mais qu'en s'approchant vers le bord, les charges étaient de plus en plus grandes. Ces expériences démontrèrent donc qu'à l'intérieur d'un conduc-

---

(*) Socin, *Acta Helvetica*, IV, p. 214.

(**) J. Pristley, *The history and present state of electricity with original experiments*. London, 1767, p. 731.

teur il n'y a pas de champ et que la surface intérieure ne porte pas de charges. Pristley se rendait parfaitement compte de l'importance de cette expérience et il écrivait (*) : « May we not infer from this experiments, that the attraction of electricity is subject to the same laws with that of gravitation, and is therefore according to the squares of the distances; since it is easily demonstrated, that were the earth in the form of a schell, a body in the inside of it would not be attracted to an side more than another ».

Cette conclusion de Pristley est passée pourtant inaperçue et la loi énoncée n'avait pas été aperçue.

Treize ans plus tard, Sir John Robinson a cherché à la déterminer par l'expérience directe et il a trouvé que la force agissante varie en raison inverse de la $2{,}06^{me}$ puissance de la distance (**). Je ne connais pas la méthode qu'il a employée.

Henry Cavendish (1731-1810), dans un remarquable mémoire (***) qui date de 1771, étant favorable à l'idée de l'inverse du carré des distances, ne la spécifia pas et supposa que la force est inversement proportionnelle à une puissance plus petite que la 3^{me}, de la distance, en remarquant toutefois que les phénomènes se passent comme si la loi était celle de l'inverse du carré.

Il redémontra, avec beaucoup plus de précision que ne l'avait fait Pristley, que l'intérieur d'un conducteur est dépourvu de charge et il fournit ainsi une preuve importante de la loi de l'inverse du carré des distances. Mais ce travail n'a été retrouvé qu'après sa mort par W. Thomson et publié seulement (iv) en 1879 par les soins de J.-C. Maxwell.

Ces idées sur la loi quantitative des actions électriques ont

---

(*) J. Pristley, *The history and present state of electricity with original experiments*. London, 1767, p. 732.

(**) E.-T. Whithaker, *A history of the theories of aether and electricity*. Dublin, 1910, p. 51.

(***) H. Cavendish, *Attempt to explain some of the principal phenomena...* (Phil. Trans., LXI, p. 584, 1771.)

(iv) *The electrical researches of the Hon. Henry Cavendish.*

été très peu connues du temps de leur découverte, et c'est à peine si elles ont exercé une influence quelconque sur le développement de la science. Leurs auteurs ne leur ont pas donné non plus la forme d'une loi générale et certaine, régissant l'attraction et la répulsion électriques, mais leur ont donné plutôt la forme d'une hypothèse, qui semblait être confirmée par certaines expériences.

La gloire d'avoir établi les lois quantitatives sous une forme précise et générale appartient à Charles-Augustin Coulomb (1736-1806). Ce savant, en effet, a réellement découvert ces lois et il ne les a pas seulement vérifiées, comme le veut Whithaker (*), car il n'avait eu connaissance ni des travaux de Robinson ni de ceux de Pristley ni de ceux de Cavendish.

§ 5. — Les expériences de Coulomb.

C'est grâce à l'instrument si précieux pour la mesure des forces très faibles que représente sa balance de torsion, que Coulomb a pu aborder la détermination directe des lois des actions électriques.

La balance de torsion est trop connue pour qu'il soit nécessaire d'en donner ici la description et la théorie; rappelons-en cependant le principe.

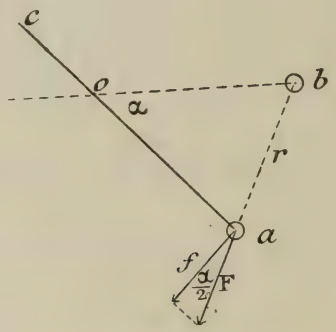


Fig. 1.

(*) E.-T. Whithaker, *loc. cit.*, p. 56.

Soit b une balle fixe et a celle fixée à l'extrémité de l'aiguille ac suspendue à un fil très fin en o.

Les deux sphères a et b étant d'abord en contact, on les électrise et, par suite, a est repoussé avec une force F, dont le moment doit être équilibré par le moment de torsion du fil. Soit β l'angle total de torsion et α celui de deux directions ob et oa, dans la position d'équilibre. Le moment M du couple de torsion est proportionnel à l'angle β :

$$M = c\beta.$$

Ce moment équilibre le moment de la force électrique F et à l'état d'équilibre on a donc

$$c\beta = fl = Fl\cos\frac{\alpha}{2}$$

en appelant l la distance du fil jusqu'au centre de la sphère. Supposons maintenant que l'on torde le fil et soit β' le nouvel angle total de torsion. La boule a va se rapprocher de b, de façon que l'angle α' sera déterminé par

$$c\beta' = F'l\cos\frac{\alpha'}{2}.$$

De ces deux relations on tire

$$\frac{F}{F'} = \frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Par la mesure des angles α, α', β, β', on peut déterminer le rapport des forces et, connaissant la distance de deux boules dans le premier et le deuxième cas, établir la loi de variation de F avec la distance r.

La balance dont se servait Coulomb ayant un fil de torsion très

fin et d'une longueur de 75^{cm}8 était excessivement sensible : à un degré de torsion correspondait la force 0,00041 gr. cm. sec^{-2}. La cage avait la forme d'un cylindre en verre de 32^{cm}48 de diamètre et de même hauteur. Les sphères agissantes étaient de 0^{cm}45-0^{cm}68 de diamètre. Au moyen de cet instrument, il effectua probablement de multiples mesures, mais n'en a publié qu'une. Voici quelles sont les données qu'il nous a laissées :

Je présenterai seulement ici, écrit-il (*), quelques essais qui sont faciles à répéter et qui mettront tout de suite sous les yeux la loi de la répulsion.

Premier essai. — Ayant électrisé les deux balles avec la tête d'épingle, l'index du micromètre répondant à 0, la balle *a* de l'aiguille s'est éloignée de la balle *b* de 36°.

Deuxième essai. — Ayant tordu le fil de suspension au moyen du bouton *o* du micromètre du 126°, les deux balles se sont rapprochées et arrêtées à 18° de distance l'une de l'autre.

Troisième essai. — Ayant tordu le fil de suspension de 567°, les deux balles se sont rapprochées à 85°.

Ce sont les seules données qui ont été publiées par Coulomb concernant les forces répulsives. On s'assure facilement que les forces sont sensiblement inversement proportionnelles aux carrés des distances des deux balles, ce qui a conduit Coulomb à énoncer cette loi précise (**) : « La force répulsive de deux petits globes électrisés de la même nature d'électricité, est en raison inverse du carré de la distance du centre des deux globes ».

Pour déterminer la loi d'attraction, Coulomb n'a pas pu se servir de la balance de torsion, car les balles s'attirant arrivent toujours à être ramenées au contact. C'est la méthode des oscillations du pendule horizontal qui fut mise en œuvre.

Une grande sphère de 32 centimètres de diamètre avait été posée sur quatre pieds en verre, et, à une certaine distance,

---

(*) Coulomb. *Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme.* (Hist. de l'Acad. roy. des sciences, 1785, p. 572.)

(**) *Loc. cit.*, p. 572

Coulomb suspendait à un fil de cocon une aiguille de gomme-laque, dont l'extrémité la plus proche de la grande sphère était munie d'un petit disque en papier doré, de $1^{cm}8$-$2^{cm}2$ de diamètre, qui était chargé négativement par influence, tandis que la grande sphère recevait des charges positives. Coulomb déterminait, pour différentes valeurs de la distance du disque à la sphère, les durées d'oscillation de l'aiguille, qui était amenée hors de la position d'équilibre par rotation autour de son axe et était attirée par la sphère. D'après les lois connues d'oscillation d'un pendule, les durées d'une oscillation étant inversement proportionnelles à la racine carrée de la force agissante, on a donc pour deux distances différentes :

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{F'}{F}}.$$

Et si la loi des attractions électrostatiques est celle des inverses du carré, on devait avoir

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{F'}{F}} = \frac{d}{d'}.$$

Voici les données de Coulomb (*) :

Premier essai. — La plaque l, placée à 3 pouces ($8^{cm}12$) de distance de la surface du globe, ou à 9 pouces ($24^{cm}36$) de son centre, a donné 15 oscillations en 20 secondes.

Deuxième essai. — La plaque l, éloignée de 18 pouces ($48^{cm}73$) du centre du globe, on a eu 15 oscillations en 41 secondes (**).

Troisième essai. — La plaque l, éloignée de 24 pouces ($64^{cm}97$) du centre du globe, on a eu 15 oscillations en 60 secondes.

(*) Coulomb, *Second mémoire sur l'électricité et le magnétisme.* (Hist. de l'Acad. roy. des sciences, 1785, p. 583.)

(**) Dans le tableau original il est indiqué 40″, mais la discussion qui suit ces mesures montre que c'est 41″ qui est le temps vrai.

En comparant les données ainsi obtenues à celles fournies par la loi de la raison inverse du carré des distances, Coulomb dressa le tableau suivant (*) :

Premier essai. — Distance du centre : 9 pouces, 15 oscillations en 20 secondes.

Deuxième essai. — Distance du centre : 18 pouces, 15 oscillations en 41 secondes.

Troisième essai. — Distance du centre : 24 pouces, 15 oscillations en 60 secondes.

Les distances sont ici comme les nombres . . .	3	6	8	
Les temps d'un même nombre d'oscillations . .	20	41	60	secondes.
Par la théorie, ils auraient dû être.	20	40	54	»

Les mesures durant quatre minutes, il était nécessaire de tenir compte de la déperdition qui, mesurée le jour même par Coulomb, était d'une valeur telle qu'en une minute l'action totale diminuait de $\frac{1}{40}$. En introduisant cette correction, Coulomb obtint le chiffre théorique pour la dernière expérience, 57 secondes au lieu de 54 secondes, ce qui ne diffère que de 5 % de la valeur expérimentale.

En se basant sur ces nombres, Coulomb écrit : « ... Ainsi nous pouvons en conclure que l'attraction réciproque du fluide électrique appelé positif, sur le fluide électrique nommé ordinairement négatif, est en raison inverse du carré des distances. »

Ce sont là toutes les données qui ont été publiées par Coulomb.

Il est vraiment difficile de comprendre par suite de quel état d'esprit, heureux pour la science, une loi aussi fondamentale, établie sur ces quelques mesures, ait inspiré aux théoriciens une telle confiance qu'ils n'ont pas hésité à la prendre pour base de leurs belles recherches, ce qui fait que l'électrostatique théorique était déjà bien développée avant d'avoir reçu des

(*) *Loc. cit*, p. 584.

démonstrations plus rigoureuses. Cela est d'autant plus étonnant que ces mesures présentent une difficulté énorme.

Prenons, par exemple, les données concernant les actions répulsives publiées par Coulomb.

L'angle de l'écart des balles α :	36°,	18°,	8°30'.
L'angle de torsion du fil β :	36°,	144°,	576°.

Le moment du couple de torsion étant proportionnel à l'angle β, les forces sont dans le rapport 36 : 144 : 576.

La loi de la raison inverse du carré des distances donne

$$\frac{F}{F'} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{\sin\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)^2$$

et en égalant à (1) on obtient

$$\beta \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \beta' \sin\frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2} = \text{const.}$$

Dans les expériences de Coulomb, cette constante a pour valeurs

3,614 3,568 3,169.

Ces différences se comprennent pourtant si l'on tient compte des erreurs inévitables. Les observations durant deux minutes, la charge dans les deuxième et troisième mesure était un peu plus faible par la perte d'électricité. Coulomb avait déterminé la déperdition le jour des expériences et il avait trouvé que, sous une torsion de 50°, l'aiguille parcourait un degré en trois minutes, ce qui nous explique déjà en grande partie l'écart. De plus, les sphères ayant les dimensions finies, leur influence mutuelle changeait la distribution uniforme, et les distances des points d'application des résultantes étaient plus éloignées que les centres des sphères. Cette augmentation de

distance est plus sensible à de petites qu'à de grandes distances. Cependant, dans les expériences de Coulomb, la distance entre les sphères a été toujours suffisamment grande, comparativement à leurs dimensions, pour que cette erreur soit absolument négligeable.

Les balles électrisées n'étant qu'à 4 centimètres de la paroi de la cage en verre, leurs champs étaient nécessairement perturbés, et cette perturbation différait pour des positions différentes de deux balles. La tige de l'aiguille maintenant la balle produisait aussi une perturbation qui tendait à diminuer l'écart de deux balles, car le point d'application de la résultante était déplacé vers le centre de la cage.

L'erreur de lecture de l'angle d'écart de deux balles peut conduire à des écarts notables, dont le sens ne peut être prévu.

Cet examen rapide montre que les causes d'erreur sont multiples et que le résultat peut être, facilement, tout à fait erroné. C'est grâce à son talent d'expérimentateur que Coulomb a pu mettre l'expérience dans des conditions telles que les erreurs n'ont pas couvert la vraie loi des actions électriques.

Nous verrons tantôt comment plusieurs physiciens, entreprenant les mêmes études, ont été conduits à des résultats tout à fait divergents.

§ 6. — Recherches de Simon, Parrot, Yelin, Mayer, Egen.

Le résultat que Coulomb avait pu obtenir grâce à l'extrême sensibilité de sa balance de torsion, dont il savait se servir avec une maëstria remarquable, ne fut pas d'emblée admis universellement. C'était surtout en Allemagne que les physiciens conservaient une attitude réservée (*). Certains d'entre eux

(*) P. N. Egen, *Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie*, Bd V, 1825, p. 199.

reprirent les mesures de Coulomb avec la balance de torsion, d'autres cherchèrent des méthodes nouvelles.

Les mesures de Simon (*) furent effectuées dans de bonnes conditions expérimentales et laissent facilement rechercher les erreurs probables. Simon avait mesuré la répulsion de deux sphères, dont l'une avait été maintenue fixe au moyen d'une tige isolante graduée pouvant glisser le long d'un support muni de divisions; l'autre sphère avait été fixée à l'extrémité du fléau d'une balance permettant d'évaluer 0,2 gr. cm. sec^{-2}.

Les deux sphères avaient été placées de façon que leurs centres soient sur la même verticale; la force répulsive avait été équilibrée par des poids connus. Des résultats qu'il avait obtenus, l'auteur conclut que les forces répulsives varient en raison inverse de la 1re puissance de la distance.

Or, Egen a montré (**) que les données de Simon ne font que confirmer la loi de Coulomb et que la fausse conclusion de Simon provient de ce que ce physicien a pris dans ses calculs, non pas les distances entre les centres des sphères, mais les distances entre leurs surfaces.

Parrot et von Yelin ont observé les oscillations d'un pendule vertical ou horizontal, se mouvant entre deux pôles d'une pile de Zamboni. Les changements de la distance entre les deux pôles font varier le temps d'oscillation. C'est de l'étude de celle-ci qu'ils voulurent tirer la loi des actions électriques. On le voit, les conditions d'expérience étaient bien complexes, alors que ces auteurs ont envisagé le problème d'une façon trop simpliste, et leur théorie est fautive. Quoique les résultats de Parrot se rapprochaient très bien de la loi de Coulomb et bien que la même concordance ait été observée par lui en employant la balance de torsion, il conclut néanmoins qu'on doit se servir de la loi de Simon, c'est-à-dire de l'inverse de la 1re puissance des distances.

(*) *Gilbert, Ann. d. Phys.*, Bd XXVIII, p. 277.

(**) *Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie*, 1825, Bd V, p. 288.

Moins satisfaisants sont les résultats de von Yelin, qui trouve une loi fort complexe. Le calcul plus exact (*) indiqué par Brandes, appliqué aux données de von Yelin, donne des résultats aussi bien différents de la 1re que de la 2me puissance.

Des recherches très soigneuses ont été exécutées par Mayer (**), qui a pris des précautions minutieuses et a développé des calculs fort intéressants concernant ses expériences. Tout le travail paraît être à l'abri de la critique; seules les hypothèses admises dans les calculs sont fautives. Mayer avait employé un instrument de mesure très simple, consistant en un électroscope dont une feuille est fixe et l'autre mobile. Les dimensions de l'ensemble étaient appropriées convenablement à ce genre de mesures. Par le calcul, Mayer avait cherché comment devrait varier l'angle de la feuille fixe avec la feuille mobile pour des charges différentes dans l'hypothèse de la loi de l'inverse de la 1re et de la 2me puissance des distances. Par un hasard dû à une coïncidence vraiment étonnante, il trouva les valeurs suivantes, que je cite à titre de curiosité :

Les angles		
calculés		Observés.
d'après la loi du carré.	d'après la loi de la 1re puissance.	
64,6	55,8	55,5
47,3	35,0	34,6
34,5	21,5	20,2
25,1	12,6	11,8

(*) Egen, *loc. cit.*, p. 219.

(**) *Comm. Soc. Reg. scient. Gott. rec. class. math.*, t. V.

La conclusion ne paraissait pas douteuse pour lui, que c'est la loi de l'inverse de la 1re puissance qui est la vraie.

Cet étrange résultat s'explique si l'on tient compte de ce que Mayer avait admis la distribution uniforme d'électricité sur les feuilles de son instrument.

En se basant sur les résultats de Simon, de Parrot, de Mayer et de ses propres mesures, Kaemtz trouva (*) également que la force répulsive varie en raison inverse de la $1,2^{mo}$ puissance des distances.

Au contraire, les mesures soigneuses d'Egen (**), qui avait repris la méthode de Simon en la perfectionnant de façon à obtenir la plus grande sensibilité, lui ont donné pour l'exposant de la puissance 1.93 en moyenne, ce qui est très voisin de la loi de Coulomb, qu'Egen considère comme la loi réelle.

§ 7. — Recherches de Harris, Riess et Marié Davy.

W. Snow Harris a effectué une série très étendue de mesures concernant les forces pondéromotrices des conducteurs électrisés, mais ses expériences furent faites dans des conditions si mauvaises et si complexes qu'il est impossible de dégager une loi exacte, même en appliquant les raisonnements exacts. Jamais l'isolement des conducteurs dans l'espace n'était suffisant, et tout au voisinage de ceux-ci, se trouvaient des parties métalliques des instruments, ce qui, évidemment, changeait complètement les résultats. Il est étrange qu'il n'ait pas perfectionné ses appareils à ce point de vue, car il se rendait parfaitement compte de l'influence néfaste des parties métalliques voisines (***). Il est donc inutile de décrire ces recherches et je ne citerai que les résultats qu'il a cru établir :

1° La force attractive s'exerçant entre un conducteur élec-

(*) Kaemtz, *Dissertatio de legibus repulsionum electricanum mathematicis*. Halle, 1823.

(**) P. N. Egen, *Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie*, Bd V, 1825, p. 294.

(***) W. Snow Harris, *On some elementary laws of electricity*. (Phil. Trans., 1834, p. 221.)

trisé et un conducteur influencé non isolé n'est pas influencée par la forme des parties ne se trouvant pas en face des deux conducteurs.

2° La force est directement proportionnelle au nombre des points agissants et inversement proportionnelle au carré de la distance.

3° La force attractive entre les disques circulaires inégaux n'est pas plus grande que celle s'exerçant entre deux disques dont chacun a les dimensions du plus petit disque.

4° La force attractive entre un simple anneau et un disque circulaire n'est pas plus grande que celle s'exerçant entre deux mêmes anneaux.

5° La force s'exerçant entre une sphère et un segment sphérique de même courbure n'est pas plus grande que celle s'exerçant entre les deux mêmes segments sphériques égaux au segment donné.

La loi de la raison inverse du carré de la distance est constatée par Harris dans le cas de l'action des disques ou d'un disque et d'un anneau circulaire; au contraire, pour les sphères ou des conducteurs d'autres formes, la loi est plus compliquée.

Dans la deuxième série de ses recherches (*), Harris avait employé une balance de torsion très sensible, mais malheureusement les parties métalliques y abondaient aussi. En examinant la force s'exerçant entre deux disques chargés, l'auteur arrivait aux résultats suivants :

1° Les disques étant chargés d'une même quantité d'électricité, la force varie en fonction inverse du carré de la distance. Mais lorsque les charges ne sont pas égales, cette loi cesse d'être vraie. Pour de petites distances, notamment, la force est inversement proportionnelle à la distance, et dans d'autres cas la loi devient irrégulière (**).

(*) W. Snow Harris, *Inquiries concerning the elementary laws of electricity*, second series. (Phil. Trans., 1836, pp. 117-452.)

(**) Ceci concorde très bien avec la loi de Coulomb. Voir V. Schaffers. *La loi de Coulomb*. (Revue des questions scientifiques, avril 1907, § 4.)

2° Les écarts de la loi $\frac{1}{d^2}$ apparaissent surtout lorsque les forces sont faibles, lorsque l'inégalité des charges est plus grande et la distance plus petite.

3° Les charges des corps qui se repoussent ne sont pas toujours proportionnelles aux forces.

L'auteur remarquait que, quoique ces lois paraissent anormales et non satisfaisantes, il se peut qu'elles se trouvent en accord complet avec les lois générales des actions électriques, et il supposait que c'est le phénomène de l'influence électrique qui complique les faits. Les données numériques de ses mémoires montrent effectivement de grandes variations et, à cause de cette complexité, l'auteur concluait que les forces mesurées dépendent de l'instrument dont on se sert. Harris se donna beaucoup de peine pour trouver une loi générale, mais il n'a pu y arriver par suite de la mise en expérience trop défectueuse. De plus, dans ses raisonnements, il ne tint pas suffisamment compte de la distribution de l'électricité, de laquelle pourtant tout dépendait.

W. Thomson, en examinant (*) le travail de Harris, trouva que, qualitativement, on pouvait se rendre compte de ses résultats, mais que l'analyse quantitative était impossible. Certains cas pourtant concordent bien avec la loi de Coulomb.

Des expériences mettant bien nettement en évidence la loi de Coulomb furent celles de Riess (**), dont les résultats, obtenus avec la balance de torsion, sont les suivants (voir tableau, page 26).

La concordance est très bonne.

Pour les distances plus grandes, Riess a employé la balance ordinaire indiquée par Egen. Les balles avaient été ramenées au contact avant l'électrisation, après laquelle on les éloignait jusqu'à ce que le fléau de la balance ait pris la position hori-

---

(*) W. Thomson, *On the mathematical theory of electricity in equilibrum.* (Reprint of Pap. of electr. and magn., London, 1872, pp. 15-37.

(**) Peter Theophil Riess, *Die Lehre von der Reibrungselektricität*, Berlin, 1853.

Mesures de Riess.

L'angle de torsion du fil.	Les angles de répulsion	
	observés.	calculés.
0°	42°	42°
70°	28°	27°44′
110°	23°	23°42′

zontale. En ajoutant des poids déterminés sur un côté du fléau, l'équilibre avait pu être atteint à d'autres distances. En partant d'une mesure, on pouvait calculer les forces correspondantes aux autres distances dans l'hypothèse de la loi de Coulomb et comparer les valeurs ainsi obtenues avec celles données directement par l'expérience. Je citerai ici quelques-uns de ses résultats où pour les mêmes charges les forces avaient été mesurées à deux distances différentes et d'après la deuxième mesure sont calculées les forces correspondantes à la première, d'après la loi de Coulomb. La distance est celle mesurée entre les centres des balles et est exprimée en $\frac{1}{200}$ de pouce ($0^{cm}0135$).

L'inspection du tableau suivant (page 27) montre qu'effectivement les forces entrant en jeu obéissent à la loi de Coulomb.

Les écarts constatés doivent être attribués à l'influence mutuelle des deux balles ainsi qu'aux erreurs d'expérience.

En ce qui concerne l'attraction, Riess ne cite pas ses mesures et il relate seulement les expériences de Coulomb.

En 1850, Marié Davy (*) a effectué de nouvelles recherches sur la question, mais avec des instruments plus perfectionnés,

(*) *Mémoires de l'Académie de Montpellier*, Section des Sciences, t. II, p. 150.

Mesures d'Egen.

Distance des centres.		Les forces		
		observées.		calculées sur la 1re mesure.
1re mesure.	2e mesure.	1re mesure.	2e mesure.	
276	211	0,9	1,3	0,76
263	204	0,7	1,4	0,84
256	189	1,2	1,8	0,98
263	220	1,8	2,7	1,89
267	201	2,8	5,8	3,29
207	123	2,5	7,1	2,51
243	156	2,6	6,3	2,60
313	173	2,6	7,3	2,23
298	175	2,6	8,3	2,86
312	151	2,6	10,7	2,51
251	163	2,7	6,6	2,78

dans des conditions bien déterminées et en faisant varier les distances dans des limites assez étendues. Comme instrument de mesure, il se servait soit d'une balance de torsion, soit d'une balance ordinaire. De ses mesures, faites très soigneusement, il croit pouvoir conclure que, dans la répulsion de deux sphères, la loi de la raison inverse du carré des distances se vérifie d'une façon approximative à partir d'une distance cinq à neuf fois plus grande que le rayon des sphères; pour des distances plus petites, l'expérience s'en écarte notablement.

Il a également expérimenté avec des disques métalliques.

« Ne pouvant point admettre la loi du carré des distances dans la répulsion des corps conducteurs électrisés... », dit-il

dans son mémoire. Mais ici il a eu tort, car il n'a pas tenu suffisamment compte de la distribution sur les sphères. La théorie ne donne point la loi de la raison inverse du carré des distances comme une loi intégrale, mais seulement comme une loi ponctuelle. Chaque expérience porte sur les corps chargés de dimensions finies, et, par suite, la loi de variation avec la distance sera différente pour chacun des corps considérés. Les données de Marié Davy confirment la loi de Coulomb si l'on tient compte de la distribution, comme l'a montré Mascart.

Pour l'étude de la loi d'attraction, Davy s'est servi de la balance ordinaire, et il conclut que « l'attraction d'un conducteur mis en communication avec le sol par un corps électrisé s'éloigne de lois de l'inverse des carrés de distances plus même que la répulsion des corps électrisés de la même manière; enfin, qu'elle s'éloigne en sens inverse ». Ici aussi les mêmes remarques s'appliquent que celles vues plus haut, et bien que ces expériences ne soient pas à l'abri des critiques, leurs résultats ne font que confirmer la loi de Coulomb.

Toutes ces mesures plus ou moins concordantes se rapportent à des valeurs relatives qui ne sont comparables que pour des mesures obtenues pour une charge donnée; car les procédés de charges ont toujours été très mal déterminés et on ne pouvait s'attendre à charger les conducteurs plusieurs fois au même potentiel.

§ 8. — Démonstration indirecte de la loi élémentaire.

Par cet aperçu de travaux expérimentaux que je viens de résumer, on peut se rendre compte des difficultés que présente l'étude expérimentale des actions pondéromotrices des corps chargés. Et même si ces recherches donnaient les résultats concordants, elles ne seraient point suffisamment sûres pour être considérées comme la démonstration indéniable d'une loi fondamentale. Mais, heureusement pour la science électrique, Coulomb lui-même et plusieurs autres physiciens étudiant

l'électrostatique adoptèrent ces mesures et, les ayant prises pour bases, ils purent édifier toute cette élégante théorie de l'électrostatique qui constituent, comme le dit Duhem (*), « ... un ensemble des notions abstraites et des propositions générales, formulées dans un langage clair et précis de la géométrie et de l'algèbre, reliées entre elles par les règles d'une sévère logique ».

Si l'on applique actuellement la loi de Coulomb avec toute confiance aux phénomènes électriques, ce n'est pas à cause des démonstrations expérimentales, car celles-ci n'ont jamais été suffisamment précises, mais parce que les démonstrations indirectes excluent toute autre loi.

La première de ces preuves, qui est en même temps considérée comme la plus probante, est celle de l'absence de champ à l'intérieur des conducteurs chargés, ce qui avait été remarqué premièrement par Franklin et ensuite vérifié et publié par Pristley, qui a fait voir, de plus, qu'à l'intérieur il n'y a pas de charge. Mais ce fait ne fut établi de façon sûre que par la célèbre expérience de Cavendisch, dans laquelle ce savant voyait la conséquence nécessaire de la loi de Coulomb. Ensuite, la même expérience a été reprise par Maxwell qui a constaté, avec une précision de $\frac{1}{2600}$, que l'intérieur d'un conducteur est dépourvu de charge et qui démontre (**) aussi que le fait de la distribution exclusivement superficielle est incompatible avec toute autre loi que celle de Coulomb. Une démonstration rigoureuse manquait pourtant, et c'est seulement Laplace (***) qui l'a établie et Bertrand l'a simplifiée. La méthode consistait à calculer la force s'exerçant en un point intérieur de la sphère par toute la charge superficielle, et le résultat montre que cette force ne peut être nulle que pour la loi de Coulomb. Cette

---

(*) P. Duhem, *La théorie physique*, p. 109.

(**) J. C. Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. I, pp. 87 et suiv.

(***) Laplace, *Mécanique céleste*, t. I, p. 2.

démonstration, si élégante au point de vue mathématique, a le défaut de supposer qu'à l'intérieur des conducteurs le champ existe, mais que la force totale est nulle par le fait qu'en chaque point les forces sont égales et de sens contraire. Or, c'est une hypothèse arbitraire sur laquelle d'ailleurs nous reviendrons plus loin.

Mais avant les démonstrations de Laplace-Bertrand, les physiciens avaient développé les premières théories électriques, dont les débuts ont illustré les brillantes recherches de Poisson, de Gauss, de Green, de Claussius et de tant d'autres qui ont fondé ainsi la théorie de l'action à distance.

CHAPITRE III.

Théorie de l'action à distance.

§ 9. — Simple application de la loi de Coulomb.

Cette théorie a régné jusqu'à l'époque de Faraday. A l'heure actuelle, son domaine est limité aux actions pondéromotrices s'exerçant entre les charges en équilibre et placées dans le vide. Elle se base sur les propositions suivantes : La force pondéromotrice n'a de signification que lorsqu'on a en présence deux corps électrisés; elle ne dépend que de la distance entre deux corps et nullement de la nature physique du milieu qui les sépare, et elle se manifeste instantanément à toute distance. La loi quantitative qui régit toute la théorie et qui est supposée applicable dans tous les cas est celle de Coulomb, et elle dit que la force pondéromotrice s'exerçant entre deux charges ponctuelles est directement proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré des distances, c'est-à-dire que

$$F = c\frac{ee'}{r^2}.$$

En prenant pour l'unité de quantité d'électricité l'unité C. G. S. électrostatique, c'est-à-dire celle qui agit sur une quantité égale placée à 1 centimètre de distance avec la force d'une dyne, la constante $C = 1$, et l'on a

$$F = \frac{ee'}{r^2} \qquad (2)$$

en supposant que la répulsion est comptée positivement et l'attraction négativement.

Si sur une charge e agissent plusieurs autres e_1, $e_2 \ldots e_4$, la force totale est la résultante des forces partielles exercées par chacune des charges e_i séparément. Si, au lieu d'un certain nombre de charges distinctes, on a une distribution continue, on divise la charge totale en parties élémentaires auxquelles on applique la loi de Coulomb. Soient, par exemple, deux systèmes électrisés S_1 et S_2, dont l'action réciproque est à déterminer. Définissons les densités cubiques ρ et superficielles σ par

$$\rho = \frac{de}{d\tilde{\tau}} \qquad \sigma = \frac{de}{dS},$$

$d\tilde{\tau}$ et dS étant respectivement le volume et l'aire élémentaire possédant la charge de. Soient $\rho_1\sigma_1$ les densités cubique et superficielle au point $x_1y_1z_1$ du système S_1 et $\rho_2\sigma_2$ ceux du système S_2 au point $x_2y_2z_2$ (*) ; l'application directe de la loi de Coulomb donne immédiatement pour la composante X, sur l'axe des x de l'action s'exerçant entre deux systèmes :

$$X = \int\int\int\int\int\int \frac{(x_1 - x_2)\rho_1\rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int\int\int\int \frac{(x_1 - x_2)\sigma_1\sigma_2 dS_1 dS_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

où l'intégration par rapport à $x_1y_1z_1$ est étendue à toutes les charges solides ou superficielles du système S_1 et celle par rapport à $x_2y_2z_2$ à celles du système S_2. D'une façon analogue, on obtient les deux autres composantes de la résultante.

(*) Il est évident qu'au point $x_1y_1z_1$ il y a ou une charge cubique de densité ρ, ou une charge superficielle de densité σ; x, y, z veut dire seulement que le point appartient au système S_1.

L'étude de ces forces est pourtant grandement facilitée par l'emploi de la fonction potentielle, dont je ne donne ici que ce qui est strictement nécessaire pour l'étude des forces pondéromotrices.

§ 10. — La fonction potentielle des charges discontinues.

Soit F la force pondéromotrice des composantes XYZ s'exerçant entre deux charges e et e', placées aux points A et A′ de coordonnées xyz et $x'y'z'$, et soit r la distance AA′; F ayant la direction AA′, on a

$$X = F\cos(rx) \qquad Y = F\cos(ry) \qquad Z = F\cos(rz),$$

mais

$$\cos(rx) = \frac{x - x'}{r} \qquad \cos(ry) = \frac{y - y'}{r} \qquad \cos(rz) = \frac{z - z'}{r},$$

donc

$$X = F\frac{x - x'}{r} = ee'\frac{x - x'}{r^3} \qquad Y = ee'\frac{y - y'}{r^3} \qquad z = ee'\frac{z - z'}{r^3}.$$

Or, en remarquant que

$$\frac{x - x}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \frac{y - y'}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \frac{z - z'}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),$$

on obtient

$$X = -e\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e'}{r}\right) \qquad Y = -e\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e'}{r}\right) \qquad Z = -e\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e'}{r}\right). \quad (3)$$

Donc, les composantes XYZ de la force s'exerçant sur la

charge $e = 1$ sont égales aux dérivées partielles changées de signe d'une certaine fonction

$$V = \frac{e'}{r} \qquad (3')$$

Une telle fonction est appelée la fonction potentielle de la charge e. Son existence peut être démontrée d'une manière rigoureuse.

Si la force s'exerce sur la charge e, ses composantes sont déterminées par les formules (3) que l'on peut écrire

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ee'}{r}\right) \quad Y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ee'}{r}\right) \quad Z = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{ee'}{r}\right) \qquad (3'')$$

et l'on voit que, dans ce cas, les composantes XYZ sont égales aux dérivées partielles changées du signe d'une fonction

$$U = \frac{ee'}{r} = e'V,$$

qui porte le nom de potentiel.

On généralise facilement ces notions aux plusieurs charges $e_1 e_2 \ldots e_n$ placées aux points $x_1 y_1 z_1 \ldots x_n y_n z_n$, dont les distances à la charge e placé au point xyz sont $r_1 r_2 \ldots r_n$.

On a, en effet,

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

et

$$X = e\sum_{i=1}^{i=n} e_i \frac{x - x_i}{r_i^3} = -e\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e_i}{r_i}\right)$$

$$Y = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e_i}{r_i}\right) \qquad Z = -e\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i}{r_i}\right),$$

ou, en posant

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{r_i}, \qquad (4)$$

on obtient

$$X = -e\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -e\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -e\frac{\partial V}{\partial z},$$

expression analogue à (3),

La fonction V déterminée par (4) est la fonction potentielle du système $e_1 \ldots e_n$.

§ 11. — La fonction potentielle des charges continues.

Supposons les charges réparties d'une façon continue dans un ou plusieurs volumes $v_1 \ldots v_n$, et soit ρ_i la densité cubique correspondante, déterminée en chaque point $x_i y_i z_i$ d'un volume v_i. La fonction potentielle de ce volume est déterminée par

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \iiint_{v_i} \frac{\rho_i dx_i dy_i dz_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}, \qquad (5)$$

l'intégration étant étendue à tout le volume v_i et la sommation a tous les n volumes.

Si la charge est répartie d'une façon continue sur une ou plusieurs surfaces S avec une densité superficielle σ, la fonction potentielle de ce système sera

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \iint_{S_i} \frac{\sigma_i dS_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}, \qquad (6)$$

l'intégration étant étendue à toute la surface S_i et la sommation a toutes les surfaces $S_1 \ldots S_n$.

En supposant les charges réparties d'une façon continue sur de certaines lignes $L_1 \ldots L_n$ avec une densité linéaire τ_i définie par

$$\tau_i = \frac{de}{dl_i},$$

dl étant un élément de la ligne chargée L_i, on aura la fonction potentielle correspondante

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{L_i} \frac{\tau_i dl_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}, \qquad (7)$$

l'intégration étant étendue à toute la ligne L_i et la sommation à toutes les lignes $L_1 \ldots L_n$.

Si, en même temps, on a des charges donnant les fonctions potentielles $V_1 V_2 \ldots V_n$, la fonction potentielle de tout le système est donnée par

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} V_i. \qquad (8)$$

Ainsi donc, dans tous les cas, la fonction potentielle est parfaitement déterminée par les formules, soit (3'), soit (4), soit (5), soit (6), soit (7), soit enfin plusieurs d'entre elles et la formule (8).

§ 12. — L'équation différentielle de la fonction potentielle.

Partant de (5), on peut établir facilement l'équation différentielle de la fonction potentielle. Mais limitons-nous au cas d'un seul volume chargé, la généralisation se faisant très facilement.

De (5) on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int \frac{(x - x_1) d\tilde{\iota} \rho}{r^3} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\int \frac{\rho d\tilde{\iota}}{r^3} + 3\int \frac{\rho d\tilde{\iota}(x - x_1)^2}{r^5},$$

de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\int \frac{\rho d\tau}{r^3} + 3\int \frac{\rho(y-y_1)^2 d\tau}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\int \frac{\rho d\tau}{r^3} + 3\int \frac{\rho(z-z_1)^2 d\tau}{r^5},$$

et en ajoutant on obtient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \qquad (9)$$

l'équation différentielle de la fonction potentielle qui est connue sous le nom de l'équation de Laplace et qui s'écrit simplement

$$\Delta V = 0. \qquad (9')$$

L'équation de Laplace doit être vérifiée par chaque fonction potentielle aux points extérieurs aux charges.

Si le point potentié P se trouve à l'intérieur de la masse agissante, divisons le volume total v en deux parties, dont l'une v_1 est une sphère de rayon R entourant le point considéré et v_2 la partie restante de v. La portion de ΔV provenant de v_2 est nulle, puisque le point est extérieur à v_2.

Soit r la distance du point P au centre de la sphère v_1; on trouve alors facilement

$$V_1 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2\pi\rho}{3} r^2$$

et ensuite

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{4\pi\rho}{3} x \qquad \frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{4\pi\rho}{3} y \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = -\frac{4\pi\rho}{3} z$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{3}$$

$$\Delta V_1 = -4\pi\rho.$$

Pour les points intérieurs aux masses agissantes, on a donc

$$\Delta V = -4\pi\rho, \tag{10}$$

ce qui est l'équation de Poisson.

Cette équation permet de déterminer la distribution des masses si l'on connaît la fonction potentielle.

§ 12. — La composante de la force dans une direction donnée.

Les différentes formes de la fonction potentielle que nous avons données permettent de déterminer sa valeur en chaque point xyz de l'espace. Les surfaces ayant pour l'équation

$$V(xyz) = C^t$$

sont appelées surfaces équipotentielles, et leurs trajectoires orthoganales, les lignes de force.

A l'état d'équilibre sur un conducteur où on suppose que sur les charges n'agissent que les forces électriques, leur résultante doit être nulle, donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

ce qui entraîne en vertu de (10)

$$\rho = 0;$$

c'est-à-dire que l'intérieur d'un conducteur en équilibre est dépourvu de charge.

Les relations (11) ont lieu en n'importe quel point du conducteur, donc en tous ses points on a

$$V = C^t,$$

c'est-à-dire que dans un conducteur en équilibre électrique, la fonction potentielle a la même valeur en tous ses points. Par suite, sa surface est une surface équipotentielle.

Avant d'aller plus loin, établissons une propriété remarquable de la fonction potentielle, très souvent utilisée dans les études des forces pondéromotrices. Imaginons que, sous l'action de la force F, une charge unitaire est déplacée de ds; le travail effectué dT est

$$dT = F ds \cos(F ds)$$

ou, en appelant $\alpha\beta\gamma$ les angles de F et $\lambda\mu\nu$ ceux de ds avec les axes coordonnées, on a

$$\begin{aligned} dT &= F ds(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu) \\ &= X dx + Y dy + Z dz. \end{aligned}$$

or,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

donc

$$dT = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -dV. \qquad (12)$$

Le travail élémentaire est donc mesuré par la chute élémentaire de la fonction potentielle. Par intégration depuis le point de départ A jusqu'à point d'arrivée B, on obtient

$$T = V_B - V_A,$$

c'est-à-dire que le travail effectué par la force électrique se

mesure par la différence des valeurs de la fonction potentielle ou de potentiel si la charge déplacée n'est pas unitaire.

Soit F_l la composante de la force électrique dans une direction l; une charge unitaire étant déplacée dans cette direction de dl aura absorbé un travail $F_l dl$ qui, en vertu de (12), est

$$F_l dl = -dV,$$

d'où

$$F_l = -\frac{\partial V}{dl}. \qquad (13)$$

Décomposons la résultante des forces électriques en un point donné de l'espace suivant la normale extérieure n_1 à la surface équipotentielle passant par ce point et suivant deux directions l_1 l_2 situées dans le plan tangent à ladite surface. En vertu de (13), ces composantes seront

$$-\frac{\partial V}{\partial n_1} \qquad -\frac{\partial V}{dl_1} \qquad -\frac{\partial V}{\partial l_2}.$$

Or, l_1 et l_2 étant situées dans le plan tangent,

$$\frac{\partial V}{dl_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{dl_2} = 0$$

et nous voyons que la résultante est toujours normale à la surface équipotentielle, c'est-à-dire tangente à la ligne de force passant par ce point. De cette dernière propriété dérive le nom de ligne de force.

§ 13. — Le théorème de Gauss.

Soit S une surface géométrique fermée qui contient à l'intérieur un certain nombre de charges e_1 e_2... e_m, et soit F_i la force électrique au point P de la surface provenant de la charge e_i, sa composante normale est F_{in}.

La somme des produits $F_{in}dS$ est appelée flux de force $d\Phi$ traversant l'élément de surface dS, c'est-à-dire

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{i=m} F_{in}dS$$

et l'inégrale

$$\Phi = \int_S \sum_{i=1}^{i=n} F_{in}dS$$

est le flux total traversant la surface S.

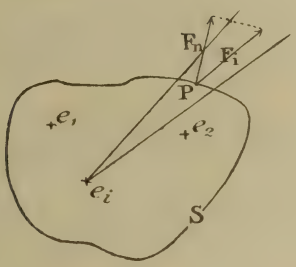


Fig. 2.

En désignant par $d\mathcal{A}_i$ l'angle solide soutenant dS, on a

$$F_{in}dS = \frac{e_i}{r_i^2}\cos\alpha\, dS = e_i d\mathcal{A}_i$$

et

$$\Phi = \int_S \sum_{i=1}^{i=m} e_i d\mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^{i=m} \int_S e_i d\mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^{i=m} e_i \int_S d\mathcal{A}_i = 4\pi \sum_{i=1}^{i=n} e_i. \quad (14)$$

C'est le théorème de Gauss, disant que le flux total traversant une surface fermée est égale à 4π fois la charge totale comprise à l'intérieur de la surface.

§ 14. — La force au voisinage de la surface chargée.

Soient S_0 la surface d'un conducteur chargé, de densité superficielle σ, N_1 et N_2 ses normales extérieure et intérieure. Limitons sur S_0 une aire dS_0 le long du contour de laquelle les lignes de force forment les génératrices d'un cylindre très court, que nous limiterons par deux bases menées parallèlement à dS_0. L'application du théorème de Gauss (14) à ce cylindre nous donne

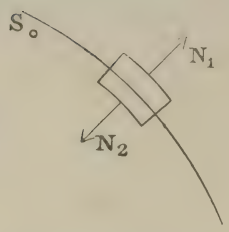


Fig. 3.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial N_1} - \frac{\partial V}{\partial N_2}\right) dS_0 = 4\pi\sigma dS_0.$$

Or, la base de la normale N_2 se trouve à l'intérieur du conducteur, où on a $V = c^t$ et par conséquent

$$\frac{\partial V}{\partial N_2} = 0,$$

et ensuite

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} = 4\pi\sigma. \qquad (15)$$

La formule (15) définit la force électrique en un point infiniment voisin de la surface chargée.

Je reviendrai dans la deuxième partie sur la force s'exerçant sur la surface chargée elle-même.

§ 15. — L'énergie d'un système électrique.

A. Un système électrisé, étant capable d'effectuer un travail, possède de l'énergie qui, puisqu'elle dépend des positions mutuelles des corps électrisés, est une énergie potentielle et elle est égale au travail total que peut effectuer le système.

En vertu de la formule (12) (§ 12), le travail dépensé pour apporter une quantité d'électricité δe depuis le point où le potentiel est nul jusqu'au point où le potentiel est V sera

$$d\mathrm{T} = \mathrm{V}\delta e ;$$

ce travail se retrouve dans l'accroissement correspondant de l'énergie du système.

Cela étant, supposons tout d'abord le système dépourvu de toute charge et au potentiel 0, et chargeons simultanément les différentes parties du système de la n^{me} partie de leur charge finale; en conséquence, leurs potentiels ne seront que les n^{mes} parties de leurs potentiels définitifs.

A un moment donné, les potentiels seront respectivement : $n\mathrm{V}_1$, $n\mathrm{V}_2$..., $n\mathrm{V}_m$; si, alors, on apporte les charges $e_1 dn$... $e_m dn$, il faudra dépenser le travail

$$d\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{i=m} n\mathrm{V}_i e_i dn,$$

et pour leur donner la charge totale, on devra varier n de 0 à 1, et, par suite, le travail total dépensé sera

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{V}_i e_i \int_0^1 n dn = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{V}_i e_i.$$

Ce travail se retrouve totalement dans l'énergie W du système, donc

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{V}_i e_i. \qquad (16)$$

B. Dans la suite, nous aurons besoin d'une autre forme de l'expression de l'énergie électrique qu'il est bon d'établir ici.

Soient P et Q deux fonctions continues, ainsi que leurs premières dérivées dans le domaine déterminé v de l'espace limité par une surface S. Le théorème de Green donne alors

$$\int \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} \right) d\tau + \int_v \mathrm{P}\Delta \mathrm{Q} d\tau + \int_S \mathrm{P} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{N}} d\mathrm{S} = 0.$$

Appliquons ce théorème au cas d'une fonction potentielle

$$P = Q = V.$$

On aura

$$\int_{\tau}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = -\int_{v} V\Delta V d\tau - \int_{S} V\frac{\partial V}{\partial N}dS. \quad (17)$$

Supposons que la fonction V est une fonction potentielle des charges réparties dans les domaines finis avec une densité cubique ρ et avec une densité superficielle σ.

Les dérivées de la fonction potentielle subissent des discontinuités sur les surfaces chargées et, par suite, l'intégrale superficielle doit être divisée en deux et l'intégration effectuée de deux côtés de la surface de discontinuité. Soient dS' un élément de cette surface et $\frac{\partial V}{\partial N_1}$ $\frac{\partial V}{\partial N_2}$ les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial N}$ de deux côtés de la surface, alors

$$-\int_{S} V\frac{\partial V}{\partial N}dS = -\int_{S} V\left(\frac{\partial V}{\partial N_1}+\frac{\partial V}{\partial N_2}\right)dS'. \quad (18)$$

Or,

$$\frac{\partial V}{\partial N_1}+\frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi\sigma,$$

par suite (18) peut s'écrire

$$-\int V\frac{\partial V}{\partial N}dS = 4\pi\int V\sigma dS'. \quad (19)$$

L'intégrale de volume de (17) peut s'écrire, d'après l'équation de Poisson (10, § 12),

$$-\int_{\tau} V\Delta V d\tau = 4\pi\int_{v} V\rho d\tau. \quad (20)$$

D'après (19) et (20), la formule (17) prend alors la forme

$$\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=4\pi\left[\int_S V\sigma dS+\int_v V\rho d\tau\right]. \quad (21)$$

D'après la formule (16), on voit que la partie droite de (21) est 8π fois l'énergie du système, c'est-à-dire que

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_v\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau, \quad (22)$$

ou, en se rappelant que $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ sont les composantes de la force électrique F, on obtient

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_v F^2 d\tau. \quad (22')$$

§ 16. — Détermination de la force pondéromotrice en partant de l'énergie du système.

Considérons un corps A, appartenant au système, effectuant sous l'action de la résultante des forces pondéromotrices un déplacement dx, et soit F_x la composante de la résultante F suivant la direction x. Le travail positif effectué par le système est égal à la diminution de son énergie potentielle, c'est-à-dire à

$$F_x dx=-dW,$$

d'où

$$F_x=-\frac{\partial W}{\partial x}. \quad (23)$$

Imaginons que le corps mobile A peut tourner et soit φ l'angle qui mesure la rotation à partir d'une position initiale

quelconque. W est aussi une fonction de φ. Soit M le moment d'un couple auquel est soumis A de la part des autres corps du système, la rotation de $d\varphi$ absorbe un travail $Md\varphi$ qui est pris aux dépens de l'énergie W du système, c'est-à-dire

$$Md\varphi = -dW,$$

d'où

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}. \qquad (24)$$

Les formules 23 et 24 nous donnent les expressions remarquables de forces pondéromotrices et qui sont déterminées dès que l'on connaît W.

Un système électrique placé dans des conditions déterminées tend à prendre une certaine configuration d'équilibre. Supposons qu'une configuration quelconque subisse un changement infiniment petit sous l'influence des forces pondéromotrices du système, la variation correspondante de l'énergie est négative et elle a pour valeur, d'après la formule (16, § 15),

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} V_i de_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} e_i dV_i. \qquad (25)$$

Pour simplifier la question, envisageons deux cas séparément :

a) Les charges des conducteurs sont invariables.

Alors

$$de_i = 0$$

et (25) devient

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} e_i dV_i.$$

Or dW étant négatif, il en doit être de même de dV, c'est-à-dire : un système donné tend à effectuer, sous l'action des

forces électriques intérieures, des mouvements qui diminuent les potentiels.

Le système tend à réduire son énergie au minimum pour autant que les conditions le permettent.

b) Les potentiels sont maintenus constants.

Pour maintenir les potentiels des corps A constants, relions-les à des sources B d'électricité de capacités considérables. Le travail effectué sera pris aux dépens des énergies de A et de B, c'est-à-dire que

$$dT = -(dW_A + dW_B). \qquad (26)$$

Or,

$$W_A = \frac{1}{2}\sum Ve.$$

et pour W_B, en remarquant que

$$e_i = c_i V_i,$$

c_i étant la capacité de B_i, on peut écrire

$$W_B = \frac{1}{2}\sum V_i^2 c_i.$$

d'où

$$dW_A = \frac{1}{2}\sum_A Vde \qquad (27) \qquad\qquad dW_B = \sum_B cVdV. \qquad (28)$$

Le principe de conservation de l'électricité donne

$$\sum_A de + \sum_B cdV = 0$$

ou puisque A et B sont au même potentiel

$$\sum_A Vde + \sum_B cVdV = 0. \qquad (29)$$

Alors les formules (27), (28) et (29) donnent

$$dW_A = -\frac{1}{2}\sum cV dV = -\frac{1}{2} dW_B \qquad (30)$$

et (26) devient, par conséquent,

$$dT = +dW_A = -\frac{1}{2} dW_B.$$

On voit donc que le travail des forces électriques est maintenant égale à l'accroissement de l'énergie du système A. La formule (30) montre de plus que ce travail est effectué aux dépens de l'énergie des sources B qui en perdent une quantité double; une moitié sert à produire le travail, l'autre à accroître l'énergie du système A qui tend vers un maximum de l'énergie pour autant que les conditions le permettent (*).

§ 17. — Démonstration indirecte de la loi de Coulomb en partant de la fonction potentielle.

Nous avons vus plus haut que la démonstration de Laplace-Bertrand n'est pas à l'abri de toute critique, car elle admet qu'à l'intérieur d'un conducteur les forces agissent réellement mais s'équilibrent toujours et donnent la résultante nulle. Une démonstration plus parfaite est celle donnée par Graetz (**). Ce physicien se base sur le fait que la fonction potentielle d'une sphère est indépendante de son rayon, ce qui n'est possible que lorsqu'elle est de la forme

$$a + \frac{b}{r},$$

(*) Une démonstration excessivement simple de cette propriété remarquable est donnée dans *Drude-König Physik des Aethers*, Stuttgart, 1912; p. 112; elle est basée sur la considération des tubes de force.

(**) *Handbuch d. Physik de Winkelmann*, t. IV, p. 23.

d'où la conclusion que, seule, la loi de Coulomb est possible.

Pourtant, dans cette démonstration, la fonction potentielle est calculée comme si toutes les charges se trouvaient dans un milieu homogène. On néglige donc ainsi la nature physique de conducteur. La valeur de la fonction potentielle au point P

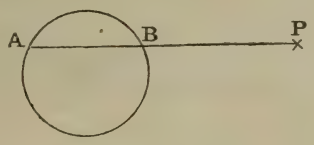


Fig. 4.

est donnée par

$$V = \int_S \sigma\psi(r)dS,$$

l'intégration étant étendue sur toute la sphère, en supposant que le milieu est homogène. Or, s'il s'agit, par exemple, de la charge placée en A, la distance r se compose de deux parties : l'une AB se trouve dans le métal et l'autre BP dans l'air. Le milieu n'est donc pas homogène et, par suite, la démonstration de Graetz n'est pas absolument satisfaisante (*).

(*) Voir également : V. Schaffers, *La loi de Coulomb*, Bruxelles, 1907, p. 28.

CHAPITRE IV.

Théorie du champ électrique.

§ 18. — Influence de la nature du milieu séparant les corps électrisés.

La simple théorie de l'action à distance ne pouvait être jugée suffisante qu'en présence de connaissances très limitées sur les phénomènes électriques. Déjà von Muschenbroek, Wilke, Cuthbersan et Cavendisch avaient observé que la nature des corps isolants influe sur les phénomènes électriques, mais c'est seulement Faraday (*) qui, par des recherches méthodiques, a pu mettre en évidence les propriétés si importantes des isolateurs, et qu'il avait dénommé propriétés diélectriques, les substances elles-mêmes corps diélectriques.

Faraday, écrit Helmholhz (**), appartenait à cette classe de physiciens qui n'ont pas cru à l'existence des forces agissantes à distance, sans apporter aucune modification aux milieux à travers lesquelles elles agissent. L'admission de cette conception est contraire à l'esprit humain. Cependant, les brillants résultats obtenus en mécanique céleste par l'admission de la loi de Newton conduisaient les physiciens à construire la physique suivant le même modèle. L'esprit de Faraday ne se pliait pas pourtant à cette forme de pensée et il commença une série de recherches ayant pour but d'étudier l'influence du milieu séparant les diverses parties d'un système électrique. Immédiatement, il a pu reconnaître que la force répulsive ou attractive entre les corps électrisés est considérablement changée

---

(*) M. Faraday, *Experimental researches*, XI, XII, XIII, XIV.

(**) H. von Helmholhz, *Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts*, Leipzig, 1897, p. 10.

par l'introduction d'un isolant entre les corps agissants. Il en conclut que l'isolateur lui-même doit subir dans les champs certaines modifications afin de pouvoir corroborer au changement observé.

D'autre part, l'étude des corps faiblement para- ou diamagnétique lui montra que le champ magnétique exerce une influence sur la matière en y produisant certaines modifications. Les phénomènes magnétiques trouvaient leur explication par l'hypothèse des petits aimants moléculaires s'orientant sous l'action de forces magnétiques extérieures. Faraday étendit cette idée aux phénomènes électriques, en supposant que, dans les diélectriques, il se produit un phénomène analogue et, notamment, que les charges électriques d'une molécule neutre se séparent sous l'action du champ extérieur et, ne pouvant pas quitter la molécule, s'assemblent en deux points différents pour former ainsi deux pôles électriques. La droite joignant les deux pôles, appelée l'axe de la molécule, est évidemment dirigée suivant la direction de la force produisant la polarisation, et cela aura lieu pour toutes les molécules qui vont se ranger ainsi dans la direction des lignes de force.

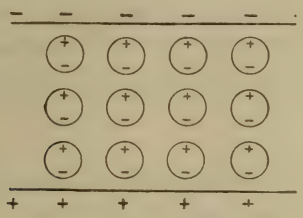


Fig. 5.

Le long d'une rangée, chaque pôle positif d'une molécule se trouvera en face d'un pôle négatif de la molécule voisine et leurs attractions se manifesteront comme une tension le long de la ligne de force, qui se transmet de proche en proche jusqu'aux surfaces des conducteurs produisant le champ et qui seront par suite soumis à une force attractive. Les molécules polarisées de deux rangées voisines auront leurs pôles de

même signe les plus proches, ce qui aura pour effet d'amener une répulsion entre les deux rangées consécutives. Une ligne de force n'est plus une ligne géométrique, la trajectoire orthogonale des surfaces équipotentielles, elle a une signification physique. Elle représente un état, caractérisé par une tension le long des lignes et une répulsion dans la direction perpendiculaire entre les diverses lignes. C'est au moyen de ce mécanisme que Faraday explique les attractions et les répulsions électrique et magnétique. La première idée de la polarisation avait déjà été émise par Wilke (*).

Cette image que je viens d'esquisser n'était chez Faraday que qualitative et, par suite, il n'était pas possible d'affirmer si la grandeur de ces forces moléculaires peut être suffisante pour rendre compte des forces mesurées. Les recherches de Faraday ont fourni la preuve suffisante de l'existence d'un effet de polarisation, mais elles n'ont pas démontré qu'il n'y a pas, en outre, une action à distance. En effet, les actions électriques ayant lieu dans le vide, pour en rendre compte par le même mécanisme, il aurait fallu de nouvelles hypothèses concernant la nature d'un milieu qui serait dépourvu de matière, mais pouvant être polarisé; de plus, on se demande comment agissent les deux pôles voisins de deux molécules polarisées? L'hypothèse de l'action à distance n'est donc pas totalement écartée dans la théorie de la polarisation.

§ 19. — Théorie de la polarisation diélectrique dans un milieu homogène et isotrope.

La théorie de la polarisation a été traitée par Poisson, Mossotti, Clausius, Helmholtz et plusieurs autres physiciens, dont les résultats généraux sont les mêmes, mais pour lesquels le mécanisme de la polarisation est un peu différent.

(*) Wilke, *Abh. d. K. Schwed. Akad.*, 1758, pp. 241, 265.

Clausius admet (*) qu'un diélectrique est parsemé de particules conductrices qui, sous l'action du champ extérieur, acquièrent leur polarité comme dans le phénomène de l'influence électrique. Helmholtz suppose (**) que les particules, disons les molécules, d'un diélectrique sont toujours bipolaires, mais que leurs axes ont toutes les directions dans l'espace et s'orientent seulement sous l'action d'un champ extérieur. Dans la théorie des électrons, on admet que les électrons de chaque molécule soient déplacés de leur position d'équilibre habituelle par les forces du champ extérieur et ainsi apparaissent les pôles de la molécule. Quel que soit d'ailleurs le mécanisme, on arrive toujours à un dipôle.

Soit un dipôle dont les charges sont $+q$ et $-q$ et les coordonnées respectives xyz, $x'y'z'$. La valeur de la fonction potentielle v' en un point distant de r du pôle $-q$ et de r' du pôle $+q$ est

$$V' = q\left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right].$$

Mais

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dz$$

en se limitant aux termes du 1er ordre vu les dimensions de la molécule. On a donc

$$V' = q\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dz\right),$$

mais, en posant

$$qdx = \alpha \qquad qdy = \beta \qquad qdz = \gamma,$$

(*) R. Clausius, *Mechanische Wärmetheorie*, 2, 64 (2. Aufl.), 1879.
(**) H. v. Helmholtz, *Journal de Crelle*, 72, p. 57, 1870.

on peut écrire

$$V' = \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

comme l'expression de la fonction potentielle d'un dipôle.

Supposons que les grandeurs caractéristiques α, β, γ sont les composantes d'un secteur dont la valeur algébrique est

$$M = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

et que la direction déterminée par les angles *lmn* est

$$\cos l = \frac{\alpha}{M} \qquad \cos m = \frac{\beta}{M} \qquad \cos n = \frac{\gamma}{M}.$$

Ce vecteur est appelé le moment électrique de la molécule et sa direction est son axe électrique. Soit *dl* la distance de deux pôles, on a alors

$$\alpha = M \frac{dx}{dl} \qquad \beta = M \frac{dy}{dl} \qquad \gamma = M \frac{dz}{dl}$$

et, par suite,

$$V' = M \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dz}{dl} \right] = M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial l}.$$

La molécule considérée, de volume $d\tilde{\imath}$, fait partie d'un diélectrique de volume déterminé, dont le moment par unité de volume nous désignons par λ μ ν, de sorte que

$$\alpha = \lambda d\tilde{\imath} \qquad \beta = \mu d\tilde{\imath} \qquad \gamma = \nu d\tilde{\imath}.$$

Par suite, la fonction potentielle de tout le diélectrique polarisé sera donnée par

$$V' = \iiint \left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dxdydz. \quad (31)$$

où r est la distance entre le point potentié et le volume $dxdydz$ et dont l'intégration est étendue à tout le volume du diélectrique.

Remarquons que l'introduction d'un vecteur $(\lambda\mu\nu)$ est nécessaire, car $\alpha\,\beta\,\gamma$ sont bien déterminés pour une molécule, mais dans les espaces intermoléculaires elles sont nulles et, par suite, l'intégration dans tout le volume du diélectrique rencontre des difficultés analytiques parce que les fonctions à intégrer sont discontinues dans l'espace d'intégration et que pour l'effectuer il serait nécessaire de connaître toutes les discontinuités et subdiviser convenablement les intégrales, ce qui présente des difficultés insurmontables.

Supposons maintenant que les corps électrisés créent un champ dont la fonction potentielle est V et dont l'intensité a pour composantes

$$-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Sous l'action du champ, le diélectrique se polarise et donne la fonction potentielle V′ ainsi que l'intensité correspondante provenant de la polarisation

$$-\frac{\partial V'}{\partial x} \qquad -\frac{\partial V'}{\partial y} \qquad -\frac{\partial V'}{\partial z}.$$

En admettant que le moment électrique soit proportionnel

à la force électrique s'exerçant au point considéré et que k soit le coefficient de proportionnalité, on a

$$\lambda = -k\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V'}{dy}\right) \qquad \mu = -k\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V'}{dy}\right)$$

$$\nu = -k\left(\frac{dV}{\partial z} + \frac{\partial V'}{\partial z}\right)$$

ou, en désignant par Φ, le potentiel total,

$$\Phi = V + V' \tag{32}$$

on a

$$\lambda = -k\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \mu = -k\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad \nu = -k\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{33}$$

ce qui, étant substitué dans la formule (30, § 19), donne

$$V' = -k\iiint\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{34}$$

Par transformation, au moyen de la formule de Green, on obtient

$$V' = k\iiint\frac{\Delta\Phi}{r}\,dxdydz + k\iint\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial N}\,dS. \tag{35}$$

La deuxième intégrale de (35) se rapporte à la surface qui, en général, est une surface de discontinuité. On la remplace donc, comme d'habitude, par

$$k\iint\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial N_2}\right)\frac{1}{r}\,dS,$$

comme on l'a vu plus haut (§ 15 B), et alors (35) s'écrit

$$V' = k\iiint\frac{\Delta\Phi}{r}\,dxdydz + k\iint\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial N_2}\right)\frac{1}{r}\,dS. \tag{36}$$

La formule (36) nous montre que la fonction potentielle d'un diélectrique polarisé est équivalente à la fonction potentielle d'une charge solide de densité cubique ρ'

$$\rho' = k\Delta\Phi = -\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\right) \tag{37}$$

et d'une charge superficielle de densité superficielle σ'

$$\sigma' = k\left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right) = -k(F_{N_1} + F_{N_2}), \tag{38}$$

qui ne sont que les densités apparentes.

En même temps, le diélectrique peut posséder la charge vraie de densité cubique ρ et superficielle σ dont la fonction potentielle sera donnée par

$$\iiint \frac{\rho}{r}\,dxdydz + \iint \frac{\sigma}{r}\,dS$$

et, dans ce cas, V' deviendra

$$V' = \iiint \frac{1}{r}\left[\rho - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\right)\right] dxdydz + \iint \frac{1}{r}\left[\sigma - k(F_{N_1} + F_{N_2})\right] dS. \tag{39}$$

On voit que (39) est équivalente à la fonction potentielle des charges distribuées d'une façon continue de densité cubique ρ_0

$$\rho_0 = \rho - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\right) \tag{40}$$

et de densité superficielle σ_0

$$\sigma_0 = \sigma - k(F_{N_1} + F_{N_2}). \tag{41}$$

Les densités $\rho_0\sigma_0$ sont appelées les densités de l'électricité *libre*, celles $\rho\sigma$ de l'électricité *vraie*, et celles $\rho'\sigma'$ de l'électricité *apparente*.

On voit que c'est l'électricité libre qui détermine la fonction potentielle dans un diélectrique de la même façon que le ferait l'électricité vraie dans le vide, et qu'ainsi tous les résultats de la théorie de l'action à distance peuvent être utilisés.

Déterminons encore les densités vraies ρ et σ.

L'équation de Poisson donne

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\Phi = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = \rho$$

et, d'après (40), on obtient

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(X+4\pi\lambda)}{\partial x}+\frac{\partial(Y+4\pi\mu)}{\partial y}+\frac{\partial(Z+4\pi\nu)}{\partial z}\right]. \quad (42)$$

D'une façon analogue, les conditions à la surface donnent

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right) = \sigma_0 \quad (43)$$

Si, de plus, nous appelons p_1 et p_2 les polarisations des deux côtés de la surface, on a, en vertu de (33),

$$p_1 = kF_{N_1} \qquad p_2 = kF_{N_2}$$

et alors de (41) et (43) on tire

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left[(F_{N_1}+4\pi p_1)+(F_{N_2}+4\pi p_2)\right] \quad (44)$$

Les formules (43) et (44) déterminent les densités vraies.

La constante k que nous introduisons à partir des formules (33) est une constante caractéristique de chaque milieu diélectrique et qui est appelée la susceptibilité électrique du diélec-

trique (*). On peut trouver facilement la signification physique de la constante k en cherchant le moment électrique d'une sphère diélectrique dans un champ uniforme. Le calcul montre que k est numériquement égal au moment électrique d'une sphère de l'unité de rayon polarisé dans un champ dont l'intensité est égale à l'unité.

Supposons maintenant que les limites de diélectrique sont les surfaces conductrices et que le diélectrique ne possède pas de charge vraie. L'équation de Poisson jointe à la formule (37) donne

$$\Delta V' = -4\pi k \Delta \Phi \tag{45}$$

Or,

$$V + V' = \Phi;$$

de plus, en vertu de l'équation de Laplace, on a en tous les points du diélectrique

$$\Delta V = 0,$$

il s'ensuit que

$$\Delta V' = \Delta \Phi,$$

et (45) donne alors

$$\Delta V' = 0, \quad \Delta \Phi = 0$$

et l'expression (35) de la fonction potentielle devient

$$V' = k \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial N} dS, \tag{46}$$

l'intégration étant étendue à toute la surface du diélectrique.

(*) Dans les ouvrages allemands on l'appelle *Dielektrizirungszahl*.

Or, actuellement, nous supposons cette surface formée par un certain nombre de surfaces conductrices $A_1 \ldots A_m$, donc

$$V' = k \iint_{A_1} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_{A_1} dS + \cdots\cdots + k \iint_{Am} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_{Am} dS. \qquad (47)$$

Φ étant une fonction continue vérifiant l'équation $\Delta\Phi = 0$, peut être transformé, par application du théorème de Green (*) et représenté par les valeurs de Φ et $\frac{\partial \Phi}{\partial N}$ sur la surface

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iint_{A} \Phi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} dS - \frac{1}{4\pi} \iint_{A} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial N} dS,$$

ce qui, dans notre cas, deviendra

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{1}^{m} \left[\iint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} \Phi_i dS_i - \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} dS_i \right] \qquad (48)$$

Les surfaces étant supposées conductrices on a toujours

$$\Phi_i = c^t$$

et d'ici

$$\iint dS \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} \Phi = c^t \iint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} dS = 0. \qquad (49)$$

D'après (49), la formule (48) devient

$$-4\pi\Phi = \sum_{1}^{m} \iint_{A_i} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_{A_i} dS, \qquad (50)$$

(*) L. Graetz, *Handbuch d. Physik de Winkelmann*, Bd IV, pp. 19 et 82.

qui, étant comparée à (47), donne

$$V' = = 4\pi k\Phi.$$

D'autre part, d'après (52),

$$V = \Phi - V',$$

donc

$$V = \Phi(1 + 4\pi k) = K\Phi. \qquad (51)$$

La nouvelle constante K est appelée la constante diélectrique ou le pouvoir inducteur spécifique de diélectrique; elle est reliée à la susceptibilité électrique k par la relation importante

$$K = 1 + 4\pi k \qquad (52)$$

(51) donne, pour le potentiel total Φ, dans un milieu homogène et isotrope de constante diélectrique K

$$\Phi = \frac{V}{K}. \qquad (53)$$

Si nous plongeons donc un système électrique donné en un milieu de constante diélectrique K, les valeurs de la fonction potentielle à chaque point de l'espace ne seront que les K^{me} parties de leurs valeurs primitives.

§ 20. — Les forces pondéromotrices dans un milieu homogène et isotrope.

Les composantes de la force en un point étant égales aux valeurs des dérivées partielles changées de signe de la fonction potentielle, on obtient immédiatement de (53)

$$X = -\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad (54)$$

c'est-à-dire, elles ne sont que la K^me partie de la force qui se serait exercée dans le vide.

On voit immédiatement que l'expression numérique de la loi de Coulomb sera également modifiée, comme d'ailleurs un simple calcul le démontre. Soient deux charges ponctuelles e et e_1, placées à la distance r et plongées dans un milieu de constante diélectrique K. Leur énergie sera donnée par l'expression

$$W = \frac{1}{2}[e\Phi + e_1\Phi_1],$$

ce qui, en vertu de (53), peut s'écrire

$$W = \frac{1}{2K}[eV + e_1V_1];$$

d'autre part,

$$V = \frac{e_1}{r}, \qquad V_1 = \frac{e}{r},$$

donc

$$W = \frac{1}{2K}\left[\frac{ee_1}{r} + \frac{ee_1}{r}\right] = \frac{ee_1}{Kr}$$

et, par suite,

$$F = \pm\frac{\partial W}{\partial r} = \pm\frac{ee_1}{Kr^2}. \qquad (55)$$

c'est-à-dire que la force s'exerçant entre deux charges ponctuelles est directement proportionnelle au produit des charges, inversement proportionnelle au carré de la distance et inversement proportionnelle à la constante diélectrique du milieu séparant deux charges. Les expériences confirmant les formules (54) et (55), on voit donc qu'au point de vue des forces pondéromotrices la théorie de la polarisation rend parfaitement compte de l'influence des milieux diélectriques.

§ 21. — Recherches expérimentales basées sur les formules (54) et (55) pour la détermination des constantes diélectriques.

Plusieurs physiciens se sont servis des propriétés indiquées au § 20 pour déterminer la constante diélectrique K des différents diélectriques, par la mesure des forces pondéromotrices s'exerçant soit entre les conducteurs chargés, soit sur un diélectrique placé dans le champ. La dernière question ne rentrant pas dans notre sujet, occupons-nous seulement de la première.

1. *Méthode de Lefèvre* (*). — Cette méthode est basée sur la détermination de l'action mutuelle de deux plateaux électrisés distants de d et entre lesquels se trouve une couche de diélectrique à étudier d'épaisseur h. Lorsqu'on établit entre le plateau la différence de potentiel v, le calcul élémentaire montre que chaque unité de surface sera attirée avec une force

$$F = \frac{v^2}{8\pi\left(d - h + \frac{h}{K}\right)^2}, \qquad (56)$$

où K est la constante diélectrique du diélectrique étudié. Celui-ci étant enlevé, on aura

$$F_1 = \frac{v^2}{8\pi d^2},$$

d'où

$$\frac{F}{F_1} = \frac{d^2}{\left(d - h + \frac{h}{K}\right)^2}$$

(*) J. Lefevre, *Comptes rendus* 113, p. 688, 1891; 114, p. 834, 1892.

la formule qui permet de déterminer K par la mesure de F et de F_0.

Cet auteur a aussi employé la mesure de l'action mutuelle de deux sphères chargées entre lesquelles il avait interposé une couche de diélectrique, les forces ayant été mesurées par la balance de torsion.

Les valeurs de constante K ainsi obtenues par Lefèvre concordent bien avec celles obtenues par la méthode plus parfaite des oscillations hertziennes.

2. *Méthode de Ziloff* (*). — Elle est basée sur la formule (54). Ziloff a construit un électromètre à cadrans, de type très simple, se composant d'un vase cylindrique en verre sur la paroi intérieure duquel sont collées quatre bandes d'étain reliées métalliquement en croix. L'aiguille est formée de lames de platine parallèles aux génératrices du vase cylindrique, et qui, reliées par un fil rigide, sont suspendues à un fil de torsion. L'une des paires des bandes d'étain est reliée à la terre, tandis que l'autre paire est reliée au pôle d'une batterie, dont l'autre pôle est mis à la terre.

On mesure tout d'abord la force F_0 s'exerçant entre l'aiguille et les cadrans dans l'air, et, ensuite, on remplit tout l'électromètre avec le liquide à étudier, ce qui fait varier la force; soit F sa nouvelle valeur. Le rapport de ces deux forces fournit immédiatement la valeur de la constante K.

$$\frac{F_0}{F} = K.$$

Cette méthode donnant de très bons résultats avait été beaucoup utilisée dans la suite et elle a subi certaines modifications ne changeant pourtant en rien ses traits généraux. Les données numériques obtenues se trouvent dans les travaux de Tomas-

(*) D. Siloff, *Pogg. Ann.*, 156, p. 389, 1875.

zewski (*), Cohn et Arons (**), Gouy (***), Heerwagen (IV), Franke (V), Tereschin (VI), Rosa (VII), Landolt et John (VIII), Smale (IX), Perot (X).

La méthode n'est évidemment applicable qu'aux liquides. En se servant de courants alternatifs, on a pu déterminer les constantes diélectriques des électrolytes. Ces mesures importantes ont montré que la constante K croît en général avec la quantité de sel dissous, mais aucune loi n'a pu cependant être établie.

Cohn (XI), par exemple, a montré que lorsque la conductibilité de l'électrolyte s'est accrue de $7{,}4.10^{-10}$ à 455.10^{-10}, la constante diélectrique n'est augmentée que de 7 %.

Smale a étudié également l'influence des solutions des sels dans l'eau sur la constante diélectrique et, ainsi, il trouve notamment que pour une teneur de 0.01 de la solution normale la constante diélectrique s'élevait, par rapport à celle de l'eau pure, de 11.3 % pour KCl, 12.6 % pour HCl, 8.6 % pour $CuSO_4$, etc.

Ces résultats indiquent que la force électrique s'exerçant entre deux charges plongées dans un électrolyte — en supposant qu'on a empêché leur décharge — est d'autant plus faible que la conductibilité de l'électrolyte est plus élevée. Mais nous ne savons pas jusqu'à quelles limites cet accroissement de la constante K se produirait.

Les expériences de Drude (XII), par exemple, montrent que la

(*) F. Tomasrewski, *Wied. Ann.*, 33, p. 33, 1888.
(**) E. Cohn und L. Arons, *Wied. Ann.*, 33, p. 24, 1888.
(***) M. Gouy, *Comptes rendus*, 106, pp. 540 et 930, 1888.
(IV) F. Heerwagen, *Wied. Ann.*, 36, p. 792, 1889.
(V) A. Franke, *Wied. Ann.*, 50, p. 163, 1893.
(VI) S. Tereschin, *Wied. Ann.*, 36, p. 792, 1889.
(VII) E. Rosa, *Phil. Mag.* (5), 31, p. 188, 1891.
(VIII) H. Landolt und H. John, *Zts. f. phys. Chem.* 10, p. 282, 1892.
(IX) F. J. Smale, *Wied. Ann.*, 57, p. 215, 1896; 60, p. 627, 1897.
(X) A. Perot, *Journal de Physique* (2), 10, p. 149, 1891.
(XI) E. Cohn, *Wied. Ann.*, 45, p. 375, 1892.
(XII) P. Drude, *Wied. Ann.*, 59, p. 61, 1896.

variation de K n'est pas toujours la même; sa méthode des oscillations électriques ne donne pas toujours le même résultat que celui obtenu par la méthode statique, ce qui s'explique d'ailleurs par la dispersion électrique.

3. — *Méthode de Quincke* (*). — C'est une modification de la méthode de Lefèvre. Quincke a mesuré l'attraction mutuelle des plateaux d'un condensateur horizontal plan, qui est plongé dans le liquide à étudier. Le plateau inférieur est immobile, le plateau supérieur est suspendu au fléau de la balance par l'intermédiaire de laquelle il est mis à la terre; le plateau inférieur est chargé au potentiel V. En désignant par d la distance entre les plateaux et S leur surface, on a

$$F = \frac{KSV^2}{8\pi d^2},$$

formule qui s'obtient de (56) et qui permet de calculer K.

Les valeurs de K ainsi obtenues ont été comparées à celles fournies par des méthodes différentes et les résultats étaient assez concordants.

§ 22. — Théorie de la polarisation et les forces pondéromotrices dans les milieux déformables et a K variable.

Dans les formules (33), nous avons posé que les composantes du moment électrique sont proportionnelles aux composantes correspondantes de la force électrique. C'était une supposition, et un examen plus complet montre que ce n'est là qu'une première approximation.

L'énergie d'un système électrique contenant des régions de

(*) G. Quincke, *Wied. Ann.*, 19, p. 795, 1883.

l'espace chargées de densité cubique ρ et des surfaces chargées de densité superficielle σ est donnée par

$$W = \frac{1}{2}\iiint V\rho dxdydz + \frac{1}{2}\iint V\sigma dS, \qquad (57)$$

ou encore, en vertu de la formule [(22), § 15 B],

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{dz}\right)^2\right] dxdydz. \qquad (58)$$

En soustrayant (58) de (57) multiplié par 2, on obtient

$$W = \iiint \left\{V\rho - \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\right. dxdydz + \iint V\sigma dS. \qquad (59)$$

Si notre système est plongé dans un diélectrique, cette expression n'est plus exacte, car on doit tenir compte de l'énergie potentielle des dipoles. Soit Φ_1 la valeur de la fonction potentielle (totale) au point occupé par le pole q, et Φ celle au point occupé par le pole $-q$, alors l'énergie de ce dipole est

$$q\Phi_1 - q\Phi = q\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz\right)$$

en se limitant aux termes de premier ordre.

En étendant la notion du moment au volume unitaire, comme nous l'avons vu au § 19, on obtient l'énergie de tout diélectrique par rapport au système

$$\iiint \left(\lambda\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \nu\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Remarquons que λ, μ, ν entrent ici à titre formel et ne sont pas définis par les relations (55).

En outre, le diélectrique lui-même, ayant subi des modifications, possède une certaine énergie propre qui est, évidemment, une fonction de la polarisation p. Soit $f(p)$ cette fonction. L'énergie totale du système sera donc donnée par

$$W = \iiint \left\{ \Phi\rho + \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + f(p) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] \right\} dxdydz + \iint \Phi\sigma dS. \tag{60}$$

N'étudiant que le phénomène électrostatique, nous devons envisager un état d'équilibre correspondant, par conséquent, à l'énergie potentielle minimum. Donc, pour toutes les variations de λ, μ, ν on devra avoir (*)

$$\delta W = 0. \tag{61}$$

En considérant ρ, σ et Φ comme constantes, on a

$$\delta W = \iiint \left\{ \delta\lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{d\lambda}\right) + \delta\mu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{d\mu}\right) \right.$$
$$\left. + \delta\nu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{d\nu}\right) \right\} dxdydz; \tag{62}$$

$\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ étant indépendantes, (61) exige

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{d\lambda}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{d\mu}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dz}. \tag{63}$$

Or,

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

(*) H. von Helmholtz, *Vorlesungen über Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus*, Leipzig, 1907.

sont les composantes de la force électrique, donc les formules (63) donnent la relation entre cette force et la polarisation et elles permettent de déterminer la première, si la fonction $f(p)$ est connue. Mais la fonction $f(p)$ n'est pas connue exactement, les expériences montrent que pour de petites valeurs de p elle est proportionnelle à p^2, mais pour des valeurs plus grandes elle croît plus vite et elle atteint enfin une limite qu'elle ne dépasse pas, même pour des champs très forts. L'étude expérimentale de la question présente plusieurs difficultés, car les diélectriques, même les plus parfaits dont on dispose, sont toujours un peu conducteurs, et, par conséquent, pour des champs plus élevés, les phénomènes se compliquent considérablement ; la formation de la charge résiduelle apporte aussi une sérieuse perturbation.

En supposant que, dans un certain intervalle, on a effectivement une proportionnalité à p^2 et soit $\frac{1}{2k}$ le coefficient de proportionnalité, on obtient

$$f(p) = \frac{p^2}{2k}, \tag{64}$$

et, ensuite, en vertu de (63)

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = X = \frac{p}{k}\frac{dp}{d\lambda}. \tag{65}$$

Mais

$$p^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

donc

$$p\frac{dp}{d\lambda} = \lambda, \qquad \text{et} \qquad \frac{dp}{d\lambda} = \frac{\lambda}{p},$$

par suite, (65) devient

$$X = \frac{\lambda}{k} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = kX \tag{66}$$

et d'une façon analogue

$$\mu = kY, \qquad \nu = kZ. \tag{66}$$

On reconnaît facilement les formules (33). L'hypothèse utilisée ici consiste à admettre que l'énergie propre du diélectrique polarisé est proportionnelle au carré de la polarisation.

Si, pourtant, on dépasse les limites entre lesquelles la formule (64) est vraie, les composantes de la force, en un point de diélectrique, seront données par

$$X = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\lambda}{p}, \qquad Y = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mu}{p}, \qquad Z = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\nu}{p}, \tag{67}$$

qui peuvent donner des valeurs plus ou moins différentes de celles obtenues par la simple hypothèse (66). L'étude de la marche de la polarisation présente un grand intérêt même pour les forces pondéromotrices. Cette étude et celle des phénomènes de la charge résiduelle, qui s'y rattache immédiatement, ont été faites par plusieurs physiciens : citons ici les travaux de Wüllner (*), Gaugain (**), Hopkinson (***), Giese ([IV]), Bouty ([V]), Bedell et Kinsley ([VI]), Wilson ([VII]) et Naccari ([VIII]). Les formules ci-dessus se rapportaient à un diélectrique parfait où la polarisation est indépendante du temps, c'est-à-dire s'établissant instantanément; de plus sa conductibilité était supposée nulle. Dans les diélectriques tels que ceux dont nous disposons, les choses se compliquent, et la polarisation, après

---

(*) A. Wüllner, *Pogg. Ann.*, 153, p. 22, 1874. *Wied. Ann.*, 1, p. 247, 1877; 32, p. 19, 1887.

(**) A. Gaugain, *Ann. Chim. Phys.* (4), 2, p. 313, 1864.

(***) J. Hopkinson, *Phil. Trans*, 167, p. 599, 1877.

([IV]) W. Giese, *Wied. Ann.*, 9, p. 161, 1880.

([V]) E. Bouty, *Comptes rendus*, 110, p. 1326, 1890; *Ann. Chim. Phys.* (6), 27, p. 62, 1892.

([VI]) F. Bedell and C. Kinsley, *Phys. Review*, 2, p. 170, 1894.

([VII]) J. Hopkinson and E. Wilson, *Phil. Trans.*, 189, p. 109, 1893.

([VIII]) A. Naccari, *Nuov. Cim.* (4), 11, p. 50, 1900.

avoir acquis presque instantanément une certaine valeur, continue à croître après l'établissement du champ, pendant un intervalle de temps considérable, de sorte que la constante diélectrique K paraît avoir des valeurs dépendantes de la durée de l'action du champ. Elle s'approche asymptotiquement vers une certaine valeur finale qui paraît être indépendante du champ. Cela paraît résulter des recherches de Thornton (*). Cependant, les travaux faits très soigneusement par Quincke (**) semblent montrer que la constante diélectrique obtenue par l'emploi des champs élevés est toujours plus petite que celle obtenue avec les champs faibles. A ce sujet, il convient de mentionner également le travail intéressant de Hooz (***). Mais la question est toujours ouverte.

Remarquons pourtant qu'il est peu probable que, pour les champs suffisamment forts, la polarisation croisse linéairement avec le champ jusqu'au potentiel disruptif. La proportionnalité existant dans de larges limites cesserait peut-être d'exister pour des valeurs du champ s'approchant de celles correspondantes à la décharge disruptive.

Pour étudier la marche de la polarisation dans le temps, Wüllner approchait une plaquette conductrice électrisée reliée à un électromètre et placée au-dessus d'un diélectrique solide ou liquide, jusqu'à une distance de $0^{cm}293$ de sa surface. Par le fait du rapprochement, la capacité de la plaque augmentait et, par suite, son potentiel initial V_0 diminuait jusqu'à une certaine valeur V. Pour l'eau, V acquiert instantanément une valeur finale ne variant plus; au contraire, chez le sulfure de carbone (CS^2), la variation dans le temps est considérable; ainsi quarante secondes après le rapprochement, le rapport $\frac{V}{V_0}$ avait la valeur 0.828; ce n'est qu'au bout de quatre-vingts minutes qu'il descendait jusqu'à $\frac{V}{V_0} = 0.405$; le pétrole a donné, après

(*) W. M Thornton *Phil. Mag.*, 19, pp. 390-407, 1910.
(**) G Quincke, *Wied. Ann.*, 19, p. 705, 1883.
(***) M. v. Hooz, *Elektrotechn. Zts.*, 22, pp. 170, 187-213, 1901.

vingt secondes $\frac{V}{V_0} = 0.855$, après quatre-vingts minutes $\frac{V}{V_0} = 0.597$; pour l'ébonite, le décroissement variait de $\frac{V}{V_0} = 0.501$ jusqu'à 0.339.

On voit que la proportionnalité supposée ne s'établit que bien lentement. Par conséquent, les simples formules (54, § 20) ne sont vraies que pour cet état d'équilibre définitif, à moins de supposer K différent à chaque instant, ce qui ne serait pourtant qu'un artifice fait pour maintenir la généralité des formules ne répondant pas à la notion théorique de la constante K. En réalité, ce sont probablement des faits parasites, dus à ce que le diélectrique est imparfait, qui font que les phénomènes se passent comme si K était variable.

Pour chaque instant de cet état initial et au delà des limites de proportionnalité entre la polarisation et le champ, ce sont les formules (67) qui déterminent les valeurs de trois composantes de la polarisation, et, par suite, l'expression de la fonction potentielle et de ses dérivées servant à déterminer les composantes de la force pondéromotrice seront aussi plus complexes.

Cela étant, cherchons les expressions générales des composantes de la force en un point du diélectrique.

Admettons l'expression (60) de l'énergie et, par application du principe de la conservation de l'énergie, cherchons les composantes de la force.

La formule (60), d'après la relation

$$f(p) = \frac{1}{2k}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

devient

$$W = \iiint \left\{ \Phi\rho - \frac{1}{8\pi}\left[(1 + 4\pi k)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} dxdydz + \iint \Phi\sigma dS,$$

ou, en remplaçant, pour simplifier, les charges superficielles par les charges à densité cubique très élevée, et en remarquant que

$$K = 1 + 4\pi k,$$

on obtient

$$W = \iiint \left\{ \Phi\rho - \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] \right\} dxdydz. \tag{68}$$

Soient δx, δy, δz les composantes d'un déplacement virtuel au point xyz qui sera, après ce déplacement, occupé par le point matériel, dont les coordonnées étaient $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$. Ce déplacement aura pour effet de faire varier K au point xyz de la quantité

$$\delta' K = -\left(\frac{\partial K}{\partial x}\delta x + \frac{\partial K}{\partial y}\delta y + \frac{\partial K}{\partial z}dz\right). \tag{69}$$

De plus, le déplacement en question est accompagné, en général, d'une déformation : ce qui entraînera la variation $\delta'' K$ de K au même point matériel. Cette question de l'influence de la déformation sur la constante diélectrique a donné lieu à plusieurs travaux expérimentaux dont les résultats sont cependant divergents. Ercolini (*), dans plusieurs expériences, constata une augmentation de la constante K du verre soumis à la traction; Corbino (**), au contraire, trouva une diminution. Plusieurs physiciens ont effectué des bonnes mesures, mais tandis que les uns (***) trouvaient une variation négative, c'est-à-dire une diminution de K avec la traction, les autres (IV), au

---

(*) G. Ercolini, *Acc. dei Lincei* (5), 7, II, pp. 172, 183, 1898; *Nuov. Cim.* (4), 8, p. 306, 1898.

(**) O. M. Corbino, *Rend. Acc. dei Lincei* (5), 8, II, p. 238, 1899.

(***) O. M. Corbino, *Nuov Cim.* (4), 8, p. 240, 1896; (4), 11, p. 136, 1900; O. M. Corbino et F. Cannizzo, *Nuov. Cim.* (4), 8, p. 311, 1898; M. Panichi, *Nuov. Cim.* (4), 8, p. 89, 1898; P. Sacerdote *Comptes rendus*, 129, 282, 1899.

(IV) P. Dessau, *Rend. Acc. dei Lincei* (5), 3, I, p. 488, 1894; Ercolini, *Rend. Acc. dei Lincei* (5), 7, II, pp. 172, 183, 1898.

contraire, observaient une variation positive, c'est-à-dire une augmentation, et d'autres (*), enfin, ne trouvaient pas d'influence. Tout récemment, M. Schiller (**) a effectué des mesures très soignées sur la variation de la constante diélectrique du caoutchouc avec une tension exercée perpendiculairement aux lignes de force du champ. Il en résulte que K diminue avec la traction et qu'elle passe notamment de 3,67 à 3,51 lors d'une dilatation de 30 %.

Quoique la nature de toutes ces variations soit presque inconnue, il est certain qu'elles existent, ce qui légitime l'introduction du terme $\delta''K$.

La déformation étant limitée à une dilatation, la variation $\delta''K$ peut être supposée proportionnelle à la dilatation spécifique $\frac{\delta dv}{dv}$ de volume élémentaire dv, c'est-à-dire que

$$\delta''K = -\theta\left(\frac{\delta dv}{dv}\right) = -\theta\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right), \qquad (70)$$

en désignant par $-\theta$ le coefficient de proportionnalité. En général, la variation de K sera donc donnée par

$$\begin{aligned}\delta K = \delta' K + \delta'' K = &-\left(\frac{\partial K}{\partial x}\delta x + \frac{\partial K}{\partial y}\delta y + \frac{\partial K}{\partial z}\delta z\right)\\ &-\theta\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right).\end{aligned} \qquad (71)$$

D'une façon analogue, le déplacement considéré plus haut fera varier la densité d'électricité vraie ρ de $\delta'\rho$,

$$\delta'\rho = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\partial y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\partial z\right), \qquad (72)$$

(*) L. T. More, *Phil. Mag.* (5), 50, p. 198, 1900; (6), 2, p. 527, 1901; P. Sacerdote, *Journ. de Ph.* (3), 10, p. 200.

(**) L. Schiller, *Diss. Leipzig.* (Ann d. Phys., 35, p. 931, 1911.)

et la déformation qui l'accompagne de $\delta''\rho$. Mais ici le principe de la conservation de l'électricité nous permet de déterminer plus exactement $\delta''\rho$.

En effet, d'après ce principe, on a

$$\rho dv = \text{const.}, \tag{73}$$

en remarquant que, dans un diélectrique, la charge ne peut pas quitter la molécule. De (73) on tire

$$\delta''(\rho dv) = dv\delta''\rho + \rho\delta dv = dv\left(\delta''\rho + \rho\frac{\delta dv}{dv}\right),$$

mais, on en a vu dans (70)

$$\frac{\delta dv}{dv} = \frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z};$$

par suite,

$$\delta''\rho = -\rho\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right),$$

en tenant compte de (73).

La variation totale $\delta\rho$ sera donc donnée par

$$\delta\rho = \delta'\rho + \delta''\rho = -\left[\frac{\partial(\rho\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\delta z)}{\partial z}\right]. \tag{74}$$

Soit maintenant X, Y, Z les composantes de la force pondéromotrice s'exerçant au point x, y, z dans un volume élémentaire $dxdydz$ et qui, pendant le déplacement δx, δy, δz, produira le travail

$$\delta T = (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)d\tau,$$

ou en considérant tous les déplacements dans le volume total du diélectrique, le principe de la conservation de l'énergie donnera

$$\delta W + \iiint (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dxdydz = 0. \tag{75}$$

Calculons maintenant δW en partant de la formule (68), où on suppose Φ constant.

$$\delta W = \iiint \left\{ \Phi \delta\rho - \frac{\delta K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} dx\,dy\,dz,$$

ou, en substituant les valeurs de $\delta\rho$ et δK données par les formules (74) et (71),

$$\begin{aligned}\delta W = \iiint \Bigg\{ & \left(-\Phi\frac{\partial(\rho\delta x)}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right. \\ & \left.\left[\frac{\partial K}{\partial x}\delta x + \theta\frac{\partial\delta x}{\partial x}\right]\right) + \left(-\Phi\frac{\partial(\rho\delta y)}{\partial y} + \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right.\right. \\ & \left.\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\left[\frac{\partial K}{\partial y}\delta y + \theta\frac{\partial\delta y}{\partial y}\right]\right) + \left(-\Phi\frac{\partial(\rho\delta z)}{\partial z} + \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right.\right. \\ & \left.\left.+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\left[\frac{\partial K}{\partial z}\delta z + \theta\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right]\right)\Bigg\} dx\,dy\,dz,\end{aligned}$$

ce qui, après transformation, devient

$$\begin{aligned}\delta W = \iiint \Bigg[& \delta x\left\{\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right.\right. \\ & \left.\left. + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right)\right]\right\} \\ & + \delta y\left\{\rho\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\theta\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right)\right]\right\} \\ & + \delta z\left\{\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right. \\ & \left.\left. - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\theta\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right)\right]\right\}\Bigg] dx\,dy\,dz :\end{aligned} \qquad (76)$$

en introduisant (76) dans (75), et remarquant que (75) doit être vérifiée pour toutes les valeurs de δx, δy, δz, on obtient

$$
\begin{aligned}
X &= -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{8\pi}\left\{\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \\
Y &= -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{8\pi}\left\{\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \\
Z &= -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{8\pi}\left\{\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Sous cette forme, on voit immédiatement les raisons physiques de l'existence de diverses parties de chaque composante.

Ces expressions nous montrent que, même au point où la densité d'électricité vraie est nulle, les forces électriques agissent, et que tout point où la constante K est variable se comporte comme portant une charge. La simple loi de Coulomb est loin de pouvoir rendre compte de ces expressions complexes.

CHAPITRE V.

La théorie Faraday-Maxwell.

§ 23. — Les forces pondéromotrices comme résultat de la tension de l'éther.

Bien que la théorie de la polarisation des diélectriques rende compte de l'influence de ces derniers sur les phénomènes électriques et que ses conséquences se vérifient pour un certain nombre de faits, elle n'est pourtant pas satisfaisante, car elle n'embrasse pas tous les phénomènes et qu'à la base gise l'idée de l'action à distance. Il est vrai que ce n'est plus la transmission instantanée à toute distance, car la polarisation se propage d'une couche polarisée à une autre qui ne l'est pas encore avec une vitesse finie, celle de la lumière; mais cette action d'une couche polarisée sur sa voisine se fait, dans la théorie de la polarisation, par l'action directe à distance qui se manifeste même aussi chez le diélectrique totalement polarisé dans l'action mutuelle des pôles appartenant soit à une même rangée de molécules, soit à des rangées différentes. Au fond donc, au point de vue du mécanisme des actions électriques, la théorie de la polarisation n'a fait qu'échanger l'action directe à grande distance par l'action directe à petite distance séparant les pôles des molécules polarisées.

Pour Faraday, la polarisation fournissait une image matérielle de lignes de force, et sur leurs deux propriétés fondamentales il s'exprime nettement de la façon suivante (*). « On peut concevoir la force directe d'induction comme s'exerçant suivant les lignes comprises et limitées par deux surfaces conductrices électrisées et accompagnées d'une force latérale ou

(*) M. Faraday, *Experimentals Researches*, XI (1297)

transversale, dont l'effet revient à écarter ou à repousser les lignes représentatives. » Un mécanisme qui permet de se rendre compte de ces propriétés essentielles est indiqué par la polarisation des molécules du diélectrique en imaginant la séparation des charges en deux pôles de signes contraires. Et Faraday ajoute que : « ou bien encore la force d'attraction qui agit entre les molécules du diélectrique dans le sens de l'induction est accompagnée d'une force répulsive ou divergente dans la direction transversale ».

Il est incontestable que dans les diélectriques, le champ électrique produit les phénomènes de nature polaire, mais cette polarité peut être conçue aussi comme le résultat des autres mécanismes. Maxwell, notamment, comprend la polarisation d'une manière plus générale. « On peut dire, écrit-il (*), qu'un élément d'un corps est polarisé quand il acquiert des propriétés égales et contraires sur deux faces opposées. » Étant donné les propriétés des lignes de force indiquées par Faraday, Maxwell suppose ces tensions et ces pressions comme des réalités dans le milieu sous la forme de déformations mécaniques. « Si nous examinons alors l'état mécanique du milieu dans l'hypothèse que l'action mécanique observée entre les corps électrisés s'exerce au travers et par l'intermédiaire d'un milieu, comme dans les exemples familiers où un corps agit sur un autre par l'intermédiaire d'une corde tendue ou d'une tige comprimée, nous trouvons que le milieu doit être dans un état de déformation mécanique (**). » Et Maxwell créa la théorie de continuité par excellence, où la polarisation est, pour ainsi dire, un effet secondaire produit sous l'action de l'état caractéristique d'un milieu, d'un éther élastique et incompressible qui remplit tout espace libre de matière. Imaginons un corps conducteur que nous allons charger à un moment donné ; la charge aura pour effet de pro-

---

(*) J. C. Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme*, vol. I, p. 69.
(**) J. C. Maxwell, *loc. cit.*, vol. I, p. 67.

duire dans la couche immédiatement voisine de la surface du conducteur un état particulier dont la nature d'ailleurs n'est pas bien connue; cet état va se transmettre d'une couche à l'autre avec la vitesse de la lumière jusqu'à la limite du champ. En supposant que la déformation en question est une déformation élastique, c'est-à-dire dont les lois obéissent à la théorie de l'élasticité, on peut trouver quels doivent être les efforts pour rendre compte des actions des corps électrisés.

Considérons un milieu élastique de constante diélectrique K comme siège d'un champ électrique dont la fonction potentielle est V. Désignons, de plus, par p_x, p_y, p_z, les efforts s'exerçant sur les aires unitaires perpendiculaires à l'axe des x, des y et des z respectivement, leurs composantes seront notées par

$$p_x \begin{cases} p_{xx} \\ p_{xy} \\ p_{xz} \end{cases} \qquad p_y \begin{cases} p_{yx} \\ p_{yy} \\ p_{yz} \end{cases} \qquad p_z \begin{cases} p_{zx} \\ p_{zy} \\ p_{zz}. \end{cases}$$

Ces neuf éléments suffisent toujours pour déterminer l'effort s'exerçant sur un élément de surface orienté d'une manière quelconque.

D'après la théorie de l'élasticité,

$$p_{xy} = p_{yx} \qquad p_{xz} = p_{zx} \qquad p_{yz} = p_{zy}$$

et les composantes P_x, P_y, P_z de l'effort s'exerçant en un point donné seront

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \\ P_y &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \qquad (78') \\ \text{et} \qquad P_z &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Si l'on veut donc que les actions pondéromotrices du champ

électrique soient expliquées par des déformations élastiques de milieu, on doit déterminer les six quantités

$$p_{xx},\quad p_{yy},\quad p_{zz},\quad p_{yz},\quad p_{zx},\quad p_{xy},$$

de façon que les composantes de la force électrique soient P_x, P_y, P_z. Or, la fonction potentielle du champ étant ici V et la densité cubique un point donné ρ, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}=-\rho\frac{\partial V}{\partial x},\\
&\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}=-\rho\frac{\partial V}{\partial y}\qquad (78)\\
\text{et}\qquad &\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}=-\rho\frac{\partial V}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Pour déterminer ces six inconnues, nous n'avons que trois équations. Par conséquent, le problème est indéterminé et admet une infinité de solutions.

Maxwell a choisi les suivantes :

$$\begin{aligned}
p_{xx}&=\frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right];\\
p_{yy}&=\frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right];\\
p_{zz}&=\frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right];\qquad (79)\\
p_{yz}&=p_{zy}=\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z};\\
p_{zx}&=p_{xz}=\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x};\\
p_{xy}&=p_{yx}=\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}.
\end{aligned}$$

On s'assure facilement que le système (79) satisfait à (78).

En effet,

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right)$$

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial y} = \frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = \frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right),$$

ce qui, substitué dans la première équation (78), donne

$$\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\Delta V.$$

D'autre part, d'après l'équation de Poisson, on a

$$\Delta V = -\frac{1}{K}4\pi\rho$$

et, par suite, la première équation (78) se ramène à une identité. D'une façon analogue, on s'assure que les deux dernières équations (78) sont également satisfaites.

Pour voir la disposition des efforts, prenons la direction de la force électrique pour l'axe des x qui, avec deux autres axes des y et des z, forme un système trirectangle. Dans ce système d'axe, on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

et les équations (79) donnent alors

$$p_{xx} = \frac{K}{8\pi}F^2, \quad p_{yy} = p_{zz} = -\frac{K}{8\pi}F^2, \tag{80}$$

$$p_{yz} = p_{zy} = p_{xz} = p_{zx} = p_{xy} = p_{yx} = 0.$$

Ces relations montrent que, le long de la ligne de force, l'effort se traduit par une tension, dans des directions perpendi-

culaires, par des compressions dont les valeurs sont pourtant les mêmes.

Il paraît donc que les formules (79) résolvent la question, mais il n'en est pas ainsi. Dans un milieu élastique, auquel les équations de la théorie d'élasticité sont applicables, les efforts résultant de petits déplacements sont des fonctions linéaires des composantes de la déformation qui, dans ce cas, représente le déplacement électrique de Maxwell, il en résulte que les efforts devraient dépendre linéairement des charges, ce qui est contredit par l'expérience. En doublant les charges, les forces seront quadruplées.

Maxwell lui-même se rendait parfaitement compte que cette théorie n'est pas parfaite. « Il faut se souvenir, dit-il (*), que nous n'avons fait qu'un seul pas dans la théorie des actions transmises à distance. Nous avons supposé que ce milieu est dans un état de tension, mais nous n'avons en aucune façon rendu compte de cette tension, ni expliqué comment elle se maintient... Je n'ai pas réussi à faire le second pas, à rendre compte, par des considérations mécaniques, de ces tensions du diélectrique. »

L'analyse approfondie qu'en ont fait Poincaré (**) et Duhem (***) a fait voir en effet de notables incohérences dans cette théorie.

Le système (79) n'est qu'un, d'une infinité d'autres solutions possibles, de sorte que les efforts ainsi déterminés contiennent une large part d'arbitraire. Drude (IV) a remarqué qu'on ne peut déterminer de tension sur une surface dS que lorsqu'on connaît la variation de l'énergie potentielle provoquée par un déplacement de chaque élément dS. Or, cette variation n'est connue que lorsque dS possède une charge. Tous les calculs

---

(*) J. C. Maxwell, *Traité*, t. I, p. 174.

(**) H. Poincaré, *Électricité et optique*.

(***) P. Duhem, *Leçons sur électricité et magnétisme*, t. II; Lienard, *La lumière électrique*, t. LII, pp. 7, 67. 1894.

(IV) O. Drude-König, *Physik des Aethers*, Stuttgart, 1912, p. 109.

des expressions de tensions et de pressions à l'intérieur de l'éther présentent donc un problème indéterminé.

Quelles que soient d'ailleurs les expressions de ces tensions, elles sont avant tout des forces dans le sens mécanique que l'on peut toujours concevoir dans un diélectrique matériel. L'éther ou l'espace vide n'est pas un milieu matériel, et les tensions de Maxwell doivent également y exister, comme dans les diélectriques matériels si elles doivent représenter l'état du champ électrique. On devrait donc chercher à construire un milieu ayant les propriétés de l'éther au moyen de propriétés de la matière. Mais alors on se buterait à des difficultés insurmontables, car dans un milieu solide élastique il est impossible de combiner les déformations de telle sorte qu'elles donnent un ensemble de tensions équivalent à celui de Maxwell.

§ 24. — Passage de la théorie de la polarisation aux tensions de Maxwell.

Les équations (77), comme l'a montré Helmholtz, permettent aussi, après quelques transformations, d'exprimer les composantes de forces pondéromotrices par les tensions de Maxwell.

La formule (42) § 19

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(X + 4\pi\lambda)}{\partial x} + \frac{\partial(Y + 4\pi\mu)}{\partial y} + \frac{\partial(Z + 4\pi\nu)}{\partial z}\right],$$

d'après les relations connues

$$\lambda = kX, \qquad \mu = kY, \qquad \nu = kZ,$$
$$K = 1 + 4\pi k,$$

devient

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(KX)}{\partial x} + \frac{\partial(KY)}{\partial y} + \frac{\partial(KZ)}{\partial z}\right] \qquad (81)$$

Introduisons cette expression dans la première équation (71), on a

$$-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\left\{K\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right],\right.$$

et la première équation (77) deviendra

$$\begin{aligned}
X&=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{8\pi}\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right],\\
Y&=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{8\pi}\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right],\\
Z&=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{8\pi}\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right].
\end{aligned}\qquad(82)$$

On voit facilement, en comparant (82) et (78'), que (82) peut se mettre sous la forme (78') si on pose

$$
\begin{aligned}
p_{xx} &= \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad+\frac{1}{8\pi}\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right], \\
p_{yy} &= \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right] \\
&\quad+\frac{1}{8\pi}\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right], \\
p_{zz} &= \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] \\
&\quad+\frac{1}{8\pi}\theta\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{83}
$$

$$
p_{yz} = p_{zy} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z},
$$

$$
p_{zx} = p_{xz} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x},
$$

$$
p_{xy} = p_{yx} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}.
$$

Les forces pondéromotrices, dont les valeurs ont été établies par la théorie de la polarisation, peuvent, par conséquent, s'interpréter au moyen de tensions élastiques dont les composantes sont données par (83) et qui concordent avec les solutions admises par Maxwell (sauf cependant le terme avec θ). Si on fait un choix convenable des axes, les résultats de ces formules indiquent bien la tension le long de lignes de force et la pression dans les directions perpendiculaires.

Supposons d'ailleurs que la constante diélectrique K n'est

pas influencée par la déformation provoquée par le champ, c'est-à-dire posons

$$\theta = 0.$$

On voit que le système (83) est identique à (79).

Si on tient compte de la variation de la constante diélectrique, aux tensions et compressions analysées plus haut s'ajoute soit une pression, soit une tension uniforme de valeur

$$\frac{\theta}{8\pi} F^2.$$

§ 25. — Démonstrations indirectes de la loi de Coulomb d'après cette théorie.

1. Dans l'étude du champ au moyen de tubes de force, Bertrand (*) a démontré très simplement que la loi d'attraction en raison inverse du carré de la distance, lorsque la force est dirigée vers le point attiré, est la seule qui permette l'emploi de tubes de force.

Supposons que le corps attirant se réduise à un point. L'attraction étant proportionnelle à une fonction $f(r)$ de la distance, les lignes de forces seront des droites partant du point attirant. Si l'on prend pour une surface initiale, sur laquelle on les distribue, une sphère ayant ce point pour centre, le nombre de lignes de forces partant d'un élément $d\omega$ de cette sphère sera proportionnel à $d\omega$, puisque sur une surface sphérique l'intensité est constante. A une distance r du centre d'action, la surface $r^2 d\omega$ sera traversée par le nombre de lignes de forces qui traverse $d\omega$; si N est de ce nombre, l'intensité sera représentée par $\frac{N}{r^2 d\omega}$ et, par conséquent, inversement proportionnelle au carré de la distance.

(*) J. Bertrand, *Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité*, Paris, 1890.

2. M. Bragg a donné une démonstration complète de la loi de la raison inverse du carré de la distance en se basant sur l'idée du déplacement élastique de l'éther dans le champ. Cet éther, étant supposé incompressible et isotrope, doit obéir nécessairement à la loi de Coulomb. Au moment de la charge d'une sphère, par exemple, la déformation, sous la forme d'un déplacement élastique vers l'extérieur, se propage autour de la sphère. L'éther est donc repoussé symétriquement dans toutes les directions et les surfaces de niveau sont elles-mêmes des surfaces sphériques. Or, dans l'hypothèse de l'incompressibilité de fluide, la quantité totale de fluide déplacé à travers n'importe qu'elle surface sphérique est la même, et puisque ces surfaces croissent avec le carré du rayon, les déplacements correspondants dans la direction du rayon sont en raison inverse de ce dernier. Comme, d'autre part, les forces élastiques sont proportionnelles au déplacement, on voit que la force varie également en raison inverse du carré de la distance.

On constate que ce raisonnement n'envisage que le champ d'un seul corps électrisé et, strictement parlant, qu'il ne donne pas encore la loi de l'action mutuelle de deux charges, car l'introduction de la deuxième charge va changer complètement la distribution des déplacements considérés ici. Notre simple raisonnement ne s'applique donc plus. On peut pourtant généraliser et étendre la même méthode, soit par application du principe de la superposition des états électriques, soit par le calcul direct comme l'a fait M. Bragg (*) et que Schaffers (**) a un peu simplifié.

Tout autour d'un point portant la charge Q, l'éther sera repoussé uniformément dans tous les sens, et le déplacement suivant le rayon à une distance r de la sphère sera donné par $\frac{Q}{4\pi r^2}$ à cause de l'incompressibilité de l'éther. On suppose

---

(*) W. H. Bragg, *Phil. Mag.*, 34, p. 18, 1892.

(**) V. Schaffers, *Revue des questions scientifiques*, avril 1907. ou « La loi de Coulomb », p. 39.

ici que le volume total déplacé se mesure par Q. En appelant E la force élastique correspondante au déplacement égal à l'unité, $\frac{EQ}{4\pi r^2}$ représentera la force élastique à la distance r. A cette force s'ajoutent les efforts de toutes les couches extérieures à celle du rayon r, et la force totale ou la pression en ce point sera donnée par la somme des produits du déplacement normal par la force élastique correspondante, considérée le long d'un rayon de la sphère depuis r jusqu'à l'infini. Le calcul fait, on trouve que la dite pression a pour valeur $\frac{EQ}{4\pi r}$.

On sait que l'énergie d'un milieu élastique en un point duquel s'exerce une force f est donné (*) par

$$W = \frac{1}{2}\int f d\tau.$$

En un point, l'énergie est donc proportionnelle à la force élastique multipliée par le volume correspondant. Il suit de là qu'à la distance r d'un point chargé de Q l'énergie sera donnée par $A\frac{1}{2}\frac{EQQ}{4\pi r}$, A étant une constante; c'est aussi l'énergie à la surface d'une sphère conductrice chargée de rayons r. Soient deux sphères S_1 et S_2 de rayons r_1 et r_2 et de charges Q_1 et Q_2; la sphère S_1 possède à sa surface une énergie propre $A\frac{1}{2}\frac{EQ^2}{4\pi r}$, mais, de plus, elle se trouve à la distance c de la sphère S_2 dont la charge produit également une déformation au point occupé par S_1. En supposant que le rayon r soit tellement petit que la force élastique est sensiblement constante sur la longueur r, on aura, pour l'énergie élastique totale à la surface de S_1,

$$W = A\frac{1}{2}\frac{EQ_1^2}{4\pi r} + \frac{B}{2}\frac{EQ_1Q_2}{4\pi c},$$

(*) Voir, par exemple, Rieman-Weber, *Die partiellen Differential gleishungen der mathematischen Physik*, Bd II, p. 156, Braunschweig, 1910.

B étant une constante. En faisant varier la distance c de dc, on aura

$$dW = -\frac{BEQ_1Q_2}{8\pi c^2}\,dc.$$

Or, cette variation de l'énergie est égale au travail de la force s'exerçant sur S_1, soit F cette force ; on a alors

$$F\,dc = dW = -\frac{BEQ_1Q_2}{8\pi c^2}\,dc,$$

d'où

$$F = \alpha\,\frac{Q_1Q_2}{c^2},$$

qui est l'expression de la loi de Coulomb.

CHAPITRE VI.

§ 26. — Théories mécaniques.

Ramener les phénomènes électriques tellement complexes à de simples phénomènes de mouvement, voilà le problème que se sont posés les créateurs des théories mécaniques. Le problème se ramène à imaginer un ensemble mécanique, disons un mécanisme qui, tout en obéissant aux lois fondamentales de la mécanique, donne, en même temps, l'interprétation de phénomènes électriques connus. Certaines des théories visent seulement une partie des phénomènes ne tenant nullement compte des autres parties de la science électrique comme par exemple les théories traitant les propriétés de substances ferromagnétiques, certains phénomènes électrooptiques, etc. Cette limitation du domaine doit être envisagée comme faite seulement à titre provisoire, mais ces théories, n'embrassant pas les faits fondamentaux, ne peuvent être envisagées comme théories mécaniques de l'électricité. Malgré les multiples essais, nous ne sommes cependant que bien peu avancés dans la voie de l'explication mécanique. Toutes les théories mécaniques qui ont été émises sont absolument insuffisantes.

Dans tous les domaines électromagnétiques entrent en jeu deux énergies : 1° l'énergie électrique ; 2° l'énergie magnétique qui s'expriment en fonctions des vecteurs électrique et magnétique. D'une façon analogue, dans un mécanisme entrent également deux énergies : 1° l'énergie cinétique T ; 2° l'énergie potentielle U.

Pour pouvoir construire un mécanisme rendant compte des phénomènes électromagnétiques, il n'est guère possible d'imaginer plus de six espèces de mécanismes différents : 1° toutes deux énergies sont potentielles ; 2° l'une est totalement cinétique, l'autre totalement potentielle ; 3° toutes deux sont ciné-

tiques; 4° l'une est partiellement cinétique, l'autre totalement potentielle; 5° toutes deux sont partiellement cinétique, partiellement potentielle; 6° l'une est partiellement l'autre totalement cinétique.

Les plus plausibles paraissaient les théories de la deuxième espèce sur lesquelles les premières recherches sont dues à Lord Kelvin, et les diverses modifications ont été développées ensuite par Sommerfeld, Boltzman et Ebert qui ont épuisés tous les cas possibles. L'énergie cinétique d'un élément d'un milieu continu a pour expression soit

$$dT = \frac{\delta}{2} v^2 d\tau$$

ou bien

$$dT = \frac{B}{2} \omega^2 d\tau$$

où δ désigne la densité, v la vitesse de translation, ω la vitesse augulaire de l'éther, $\delta\tau$ un volume élémentaire. D'autre part, les expressions de l'energie électrique et magnétique sont

$$d\tau \frac{K}{8\pi} E^2 \qquad \text{et} \qquad d\tau \frac{\mu}{8\pi} H^2,$$

K étant la constante diélectrique et μ la perméabilité magnétique du milieu, E et H les intensités respectives des champs électrique et magnétique.

Les plus simples des hypothèses sont donc à poser

soit $E = \sqrt{\frac{4\pi\delta}{K}} v$ (1) soit $H = \sqrt{\frac{4\pi\delta}{\mu}} v$ (2)

ou bien encore

soit $E = \sqrt{\frac{4\pi B}{K}} \omega$ (3) soit $H = \sqrt{\frac{4\pi B}{\mu}} \omega$ (4).

La théorie correspondante à l'hypothèse (1) a été développée par Lord Kelvin, celle correspondant à (2) par Sommerfeld, celle correspondant à (3) par Boltzman et enfin (4) a été utilisée par Ebert.

La discussion de ces différentes théories sort du cadre de ce travail et je renvoie le lecteur à l'ouvrage de H. Witte (*) discutant en détails cette question. La discussion fait voir qu'aucune de ces théories n'est suffisante à représenter les phénomènes électriques.

Quant aux théories appartenant aux cinq espèces restantes, elles ont été toutes développées, mais elles se sont montrées encore moins satisfaisantes. Comme l'avait montré Witte, il n'est pas possible de construire une théorie mécanique d'électricité en se basant sur la mécanique de l'éther continue.

Dans le dernier temps, il commence à se développer des théories n'admettant plus la continuité dans le champ électrique et magnétique. Une conception régit ces théories, c'est celle de l'existence réelle de lignes de force constituant le champ. Citons les théories de De Heen, de J.-J. Thomson et de Lénard, dont les différences sont cependant assez marquées. De Heen admet que les deux énergies électrique et magnétique sont toutes deux cinétiques et que toutes deux s'expriment en fonction de la vitesse angulaire de mouvement tourbillonnant de l'éther.

Lénard pense autrement. Il suppose également que les deux énergies sont cinétiques, mais que l'énergie électrique s'exprime par une fonction de la vitesse angulaire, tandis que l'énergie magnétique s'exprime par une fonction de la vitesse de translation de l'éther.

Ces théories n'étant qu'en voie de formation, il n'est pas possible de se prononcer à l'heure actuelle sur leur importance pour l'avenir. Sous leur forme actuelle, elles possèdent un

---

(*) H. Witte. *Ueber der gegenewärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen*, Berlin, 1906.

grave défaut que le vecteur électrique est, dans ces théories, axial, tandis que les faits montrent que c'est le vecteur magnétique qui est axial, tandis que le vecteur électrique est polaire.

En résumé, dans l'état actuel de la science, nous ne possédons aucune théorie mécanique permettant d'expliquer quantitativement les phénomènes électriques et, en particulier, les forces pondéromotrices du champ électrique.

CHAPITRE VII.

§ 27. — Forces pondéromotrices électrostatiques dans un champ magnétique variable.

Les découvertes d'Oersted et d'Ampère ont fait voir qu'il existe une relation étroite entre les perturbations électriques sous la forme de courant et le magnétisme.

Les travaux de Faraday, de Weber, de Rieman et de Clausius n'ont fait qu'accentuer de plus en plus l'existence des relations étroites entre les phénomènes électriques et magnétiques. Mais c'est Maxwell qui a su résoudre complètement ce problème important en établissant les équations reliant les composantes des champs électrique et magnétique pour les corps en repos. Pour notre but, il ne nous intéresse qu'au second système de ses équations et notamment

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{c}\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \end{aligned} \quad \text{ou} \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial x} = \text{curl E},$$

L, M, N étant les composantes de l'intensité du champ magnétique H; X, Y, Z étant les composantes de l'intensité du champ électrique E; μ la perméabilité magnétique du milieu; c la vitesse de la lumière.

On voit, d'après ces équations, que lorsque le champ magnétique varie, il prend naissance au champ électrique dont le curl de l'intensité est proportionnel à $\frac{\partial H}{\partial \alpha}$ (*).

(*) E entrant dans ce système est mesuré dans le système électrostatique d'unité.

Donc une charge électrique placée dans un champ magnétique variable sera soumise à l'action d'une force d'origine électrique.

Indépendamment, Lippman, à la suite des expériences de Rowland, démontre (*), en envisageant la réversibilité des phénomènes observés, que le champ magnétique variable doit exercer une action pondéromotrice sur une charge statique. En effet, le raisonnement simple le fait voir.

Les expériences de Rowland et de ses continuateurs ont démontré qu'une aiguille aimantée placée au voisinage d'une charge en mouvement est soumise à l'action d'une force pondéromotrice qui tend à la dévier. Or, dans ce phénomène, il ne s'agit évidemment que de mouvement relatif de la charge par rapport au pôle magnétique et, par suite, le phénomène ne changera pas si c'est le pôle magnétique qui sera animé d'un mouvement par rapport à la charge. Il s'ensuit donc que le mouvement d'un pôle magnétique doit engendrer un champ électrique capable d'agir sur une charge statique.

Les premières recherches expérimentales sont dues à O. Lodge (**) qui, guidé par la théorie de Maxwell et les expériences de Rowland, avait cherché à mettre en évidence la force en question. Voici le principe du dispositif qu'il avait employé.

Un anneau en fil de fer formait le noyau d'un électroaimant, dont l'enroulement à simple couche était divisé en deux moitiés réunies d'un côté par un interrupteur, tandis que de l'autre les fils étaient mis aux bornes d'une batterie d'accumulateurs dont le milieu était relié au sol.

Au centre de l'anneau était suspendu, dans une cage en verre, une aiguille en gomme laque, portant à ses extrémités

---

(*) G Lippman, *Action du magnétisme en mouvement sur l'électricité statique.* (Comptes rendus, p. 151, 1879.)

(**) O. Lodge, *On an electrostatic field produced by varying magnetic induction.* (Phil. Mag, (5), 27, p. 469, 1889.)

deux petits cylindres conducteurs chargés d'électricité de noms contraires.

Le point très délicat de l'expérience était de régler l'aiguille de telle façon que l'effet électrostatique dû au champ électrique du courant magnétisant soit négligeable, ce qui n'était réalisé qu'approximativement dans les expériences de Lodge. En fermant le courant synchroniquement avec les oscillations propres de l'aiguille, cet auteur est parvenu à obtenir des déviations appréciables..., « le fil du spot lumineux oscillait de 2 à 3 millimètres quand on faisait fonctionner le commutateur synchroniquement avec les oscillations de l'aiguille ». On voit que de telles déviations pourraient être également produites par la variation du potentiel de l'enroulement, vu que le réglage de l'aiguille n'était pas parfait.

Le résultat est donc douteux.

La méthode analogue a été appliquée ensuite par F.-E. Wolf (*) qui a produit le champ variable en lançant dans l'enroulement d'un puissant électroaimant un courant variable. Mais les difficultés expérimentales considérables n'ont pas permis de mettre en évidence l'action cherchée. Dans la suite, le même auteur a employé une autre méthode (**) (les recherches non publiées) dont le principe consiste à charger l'aiguille destinée à déceler la force électrique synchroniquement avec la variation du champ magnétique, mais, dans son dispositif, le changement de phase et les effets parasites ont masqué l'action cherchée et il n'a pas pu obtenir aucun résultat bien net.

En 1897, V. Cremieu (***) a repris l'étude de la question,

(*) F. E. Wolf, *Berechnung und Versuch zum Nachweis der ponderomotorischen Wirkung von verärderlichen magnetischen Feldern auf elektrostatisch geladene Körper.* (Inaug. Diss., Greifswald, 1899.)

(**) K. Henrich, *Nachweis der elektrostatisch ponderomotorischen Wirkung der Induktion.* (Inaug. Diss., Marburg, 1910, p. 10.)

(***) V. Cremieu, *Recherches expérimentales sur l'électrodynamique des corps en mouvement.* (Thèse, Paris, 1901.)

mais les résultats ont été nettement négatifs. Dans son dispositif, un disque circulaire, fixé à une monture en verre, était suspendu par un fil métallique qui, longeant le cadre en verre, communiquait avec le disque. Le cadre entourait un électroaimant à circuit magnétique fermé et dans le champ duquel se trouvait le disque. Pour l'expérience, on chargeait le disque et en même temps on lançait le courant dans l'électroaimant; on renversait ensuite alternativement le courant magnétisant et la charge du disque. En calculant le couple moteur qui devrait se manifester et en mesurant le couple antagoniste de la torsion du fil de suspension, Cremieu a calculé les déviations qui devraient avoir lieu. Ainsi dans les dispositifs différents, on devrait observer les déviations de 15, 14, 94 millimètres de l'échelle, tandis qu'en réalité les expériences ont donné toujours la déviation nulle.

Wilson (*) a objecté que les déviations ne doivent pas effectivement avoir lieu, car au moment du renversement de la charge dans le fil communiquant avec le disque et longeant le cadre qui entourait l'électroaimant, parcourait un courant subissant une action de la part du champ magnétique. Cette action était d'ailleurs de signe contraire à celle qui devait s'exercer sur le disque chargé. Bien que dans les expériences de Cremieu le circuit magnétique était fermé, mais, néanmoins, le champ magnétique n'était pas probablement tout à fait concentré dans le noyau, et l'action, dont parlait Wilson, pourrait exister effectivement.

Les recherches furent reprises sous une autre forme par Righi (**) qui a placé une aiguille chargée en papier dans le champ d'un électroaimant, et pour la préserver du mouvement de l'air et du champ électrique du courant magnétisant, il l'a placée dans une boîte en zinc, ce qui écarte certains effets parasites, mais insuffisamment cependant, car aucun résultat certain n'a pu être tiré par Righi de ses recherches.

(*) H. A. Wilson, *Phil. Mag.*, t. II, pp. 144-150, 1901.
(**) Righi, *Phys. Zts*, 3, p. 454, 1901-1902.

Plus significatifs sont les résultats d'un travail de Henrich (*). Voici le principe de la méthode suggérée par le Prof^r Richartz : une tige diélectrique étant placée dans un champ électrique constant, se polarise et tend à se placer parallèlement aux lignes de force du champ. Si on suspend donc une tige en verre, par exemple, dans un champ magnétique variable, le champ électrique produit pendant l'état variable va polariser le verre, et la tige sera, par suite, soumise à l'action d'un couple tendant à la ramener dans la direction des lignes de force du champ électrique polarisant. Si la variation du champ magnétique change de signe, le champ électrique changera également de signe et il en sera de même de la polarisation, par conséquent le couple agissant sera de même sens. Si on remplace la tige diélectrique par une tige métallique, le champ électrique créé agira sur des charges induites par lui-même et la tige tendra également à se placer dans la direction de lignes de force du champ électrique.

Le champ a été produit par deux anneaux à noyau en fer doux et a double enroulement spécial pour que les actions électrostatiques de deux enroulements s'entre détruisent. Cet électroaimant a été alimenté par un courant alternatif de 60 périodes, de 65 volts et 6,5 ampères. Dans ces conditions, la tige en tôle d'alluminium de 2 centimètres de longueur et de $0^{cm}4$ de largeur suspendue à un fil de quartz (le tout se trouvant dans le vide) a donné des déviations facilement observables. Le courant continu de 65 volts et 6,5 ampères était sans influence. Les tiges de colophane ont donné les mêmes résultats. L'auteur conclut que le champ électrique engendré par un champ magnétique variable fait tourner une aiguille diélectrique dans la direction des lignes de force de la même façon que le ferait un champ électrostatique et que cela peut s'expliquer seulement par hypothèse que le champ en polarisant la tige met en évidence les charges libres à ses

(*) K. Henrich, *Loc. cit.*

extrémités et qu'il agit sur celles-ci comme le ferait un champ électrostatique ordinaire.

La bonne concordance quantitative entre la théorie et l'expérience se trouve réalisée dans les recherches de Kuehne (*), qui n'a pas eu connaissance du travail de Henrich et même peut-être qu'il l'a précédé.

Kuehne a construit un condensateur plane formé par vingt couples d'anneaux circulaires dont une vingtaine avaient été fixés sur le noyau en fer d'un électroaimant, comme sur axe. La deuxième vingtaine avait été rendue solidaire avec un cadre en bois suspendu à un fil en bronze permettant les déviations du cadre autour de l'axe de noyau de l'électroaimant.

Les plateaux mobiles avaient été chargés, par intermédiaire, de fil de bronze, par le secondaire d'un transformateur, dont le primaire avait été monté en parallèle avec le circuit magnétisant. La différence de potentiel qui chargeait le condensateur était ainsi décalée à peu près de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au flux magnétique. Ce dernier, étant variable, engendre, conformément aux équations de Maxwell, un champ électrique dont les lignes de force entourent le noyau de transformateur et sont parallèles aux plans des disques du condensateur. Sous l'action de ce champ, le cadre portant les disques dévie d'un certain angle dont la mesure permet de calculer l'intensité du champ qui l'a provoqué.

Les déviations observées par Kuehne variaient de $0^{cm}5$ à 10 centimètres de l'échelle et les valeurs du champ ainsi mesurées ne diffèrent que de quelques pour cent des valeurs théoriques.

Ainsi donc la théorie a été pleinement confirmée par l'expérience.

(*) J. M. Kuehne, *Phys. Rev.*, 29, pp. 558-559, 1909. *Phil. Mag*, (6), 19, pp. 461-476, 1910. *Le Radium*, 7, p. 320, 1910.

CHAPITRE VIII

§ 28. — Champ électrostatique des courants.

Chaque partie d'un conducteur parcouru par un courant est à un certain potentiel et, par suite, l'isolant qui l'entoure est le siège d'un champ électrique.

La distribution des potentiels à l'intérieur et à la surface de conducteur est parfaitement déterminée par la loi d'Ohm. Cette loi ne fournit cependant aucune indication sur la distribution de potentiels dans le champ qui entoure le conducteur.

Le problème électrostatique est le suivant (*) :

« Étant donné, par les lois d'Ohm, la distribution permanente des potentiels à la surface des conducteurs parcourus par les courants, et les potentiels ou les charges des conducteurs isolés, trouver le champ électrique dans l'isolant homogène qui les entoure et, par conséquent, la distribution des densités superficielles sur tous les conducteurs. »

Le cas général est celui où on a en présence plusieurs circuits parcourus par des courants et des corps chargés statiquement. Si on fixe l'attention sur un circuit, tous les autres circuits peuvent être considérés comme les conducteurs chargés à potentiel variable le long du conducteur, et le problème énoncé peut être partagé en deux problèmes partiels :

1° Le circuit considéré est parcouru par un courant, tandis que les autres conducteurs ont leurs potentiels nuls ;

2° Le circuit est au potentiel nul et les autres conducteurs sont aux potentiels connus.

Le deuxième problème est celui de la distribution d'électri-

(*) M. Brillouin, *Propagation de l'électricité*, p. 147, Paris, 1904.

cité sur un système de conducteurs en équilibre, problème purement électrostatique.

Le premier problème peut être résolu si on connaît la fonction de Green, relative à la configuration donnée des conducteurs. Il faut remarquer que, même pour ces cas, la discussion et les calculs sont peu abordables.

Si le premier problème est résolu, on n'a qu'à ajouter aux densités superficielles déterminées les densités des charges induites calculées dans le deuxième problème pour avoir la distribution complète.

Cependant la résolution de la première et de la deuxième question est très difficile et la fonction potentielle du champ électrostatique des courants n'est connue que pour quelques cas seulement.

Le champ électrique d'un fil cylindrique parcouru par un courant constant et éloigné de tout autre conducteur est indéterminé (*), et on ne peut rien dire sur la forme de surfaces équipotentielles. C'est seulement lorsque le fil est entouré d'une enveloppe concentrique au potentiel nul que l'on peut déterminer le champ.

Dans ce cas, sur le fil de rayon R on a

$$V = -A_{\infty}$$

et sur la surface de l'enveloppe de rayon R'

$$V = 0.$$

Dans l'espace intermédiaire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

(*) M. Brillouin, *loc. cit.*, p. 149.

Dans ces conditions, on trouve

$$V = -A_x \frac{\log \frac{r}{R'}}{\log \frac{R}{R'}},$$

r étant la distance du point potentié à l'axe du fil.

Quelques cas intéressants sont donnés par Brillouin (*).

Une charge statique placée dans le champ d'un courant constant sera soumise donc à l'action de son champ électrique dont nous parlons ici. Si le courant est variable, à cette action va s'ajouter celle provenant du champ créé par la variation du champ magnétique.

La question, au point de vue théorique, n'est qu'ébauchée ; les recherches expérimentales manquent totalement.

(*) M. Brillouin, *loc. cit.*, pp. 151-158. *Champ électrostatique permanent et variable d'une bobine parcourue par un courant électrique.* (Ann. Chim. Ph., 1902.)

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

Étude des actions de sphères électrisées.

INTRODUCTION.

Dans la première partie, nous avons vu que la théorie de la polarisation basée sur la théorie de l'action à distance et celle de Faraday-Maxwell sont équivalentes au point de vue mathématique et que toutes deux expliquent les lois fondamentales. Cette concordance existe-t-elle sur tous les points? Évidemment non. Si à l'heure actuelle il ne paraît pas y avoir de divergence, c'est seulement à cause d'une connaissance insuffisante des phénomènes et cela ne préjuge en rien sur l'avenir. L'analyse approfondie faite par C. Neumann (*) des deux types de théories lui a montré qu'il y a des discordances dans les lois différentielles, notamment en ce qui concerne les couches de passage du diélectrique (**); mais, en cherchant des lois intégrales, il a trouvé une concordance (***). Cet auteur ajoute

(*) C. Neumann, *Uber die Maxwell-Hertzsche Theorie.* (Abh. d. K. Sächs, Gesell. d. Wiss. Math.-Phys. Kl., XXVII, pp. 213-348, 1901.)

(**) *Loc. cit.*, § 19, p. 323.

(***) C. Neumann, *Abh. d. k. Sächs, Gesell. d. Wiss. Math.-Phys. Kl.*, pp. 753-860, 1902.

qu'il lui est impossible de tirer une conclusion définitive : « ... car les recherches expérimentales qui, seules ici, peuvent être décisives, sont, dans l'électrostatique et dans la distribution du magnétisme, à mon avis, trop incertaines ».

Effectivement, les recherches faites dans ce domaine, présentant des difficultés considérables, ne donnent pas assez de certitude et de plus elles fournissent seulement des valeurs relatives; c'est ce qui a forcé les physiciens, nous l'avons vu, à chercher à établir la loi élémentaire en partant de certains faits plus accessibles à l'expérience. C'est ainsi que la loi de Coulomb, comme loi ponctuelle, a été hors du moindre doute. Nous pouvons être sûr que quelles que soient les idées que l'on se fera sur la nature des phénomènes électriques, cette loi subsistera tant que l'on ne voudra l'extrapoler trop. Mais la confiance n'est point aussi grande en ce qui concerne ses applications. Chaque loi physique n'est vraie que dans certaines conditions bien déterminées pour chacune d'elles. Une loi élémentaire étant vraie peut ne pas être applicable dans sa plus simple expression dans certains cas. Supposons, par exemple, deux charges ponctuelles placées même dans le vide et étant toutes deux en repos par rapport à la terre ; à ces deux charges la loi paraît être applicable en toute rigueur. Il n'en est cependant rien. Les théories modernes montrent que deux charges se mouvant par rapport à l'éther, qui est le siège de son champ, n'obéissent plus à la simple loi de Coulomb et que leurs actions mutuelles dépendent de leur orientation par rapport au mouvement de la terre et à la vitesse de cette dernière.

Une des applications douteuses de la loi élémentaire est celle qui se rapporte aux charges réparties sur les conducteurs. En effet, il semble bien étonnant qu'une loi aussi variable avec les conditions qu'est la loi des actions électriques reste rigoureusement vraie dans les conducteurs dont les propriétés électriques les différencient aussi profondément des corps diélectriques. A ce point de vue même, l'analogie avec les phénomènes magnétiques, si souvent invoquée, parle plutôt contre cette application. Les lignes de forces magnétiques

existent, en effet, à l'intérieur des aimants comme on peut s'en persuader en creusant une cavité dans le métal et en y plaçant une aiguille aimantée, mais rien de pareil ne s'observera dans l'électrostatique; à l'intérieur d'un conducteur chargé, il n'y a pas de force. L'hypothèse donc de l'applicabilité de la loi est toute singulière, mais elle est maintenue, car les expériences ne la contredisent pas. Or, cette applicabilité de la loi (seulement au point de vue mathématique) peut être soumise à l'épreuve de l'expérience par les mesures directes des valeurs absolues des forces dont les expressions sont données par la théorie, et c'est, dans ce but, que j'ai entrepris des mesures, en valeurs absolues, des forces répulsives et attractives, s'exerçant entre des sphères de grand diamètre et que je résume ici.

Principe de la méthode.

Le principe de la méthode suivie dans ces mesures est très simple : des sphères de dimensions connues sont placées dans de bonnes conditions d'isolement et, à une distance bien déterminée, on les charge d'électricité de même signe ou de signes contraires à des potentiels connus et on mesure la force s'exerçant entre elles.

Bien que le principe soit simple, l'exécution de ces recherches m'a demandé de longues études préparatoires, et c'est seulement au bout de quatre ans que j'ai pu obtenir des résultats définitifs.

Examinons successivement les différentes parties de l'installation complète.

I. *Les sphères.* — C'est la seule forme de conducteurs que j'ai employée dans les mesures définitives, car les calculs de la distribution, déjà très longs pour le cas des sphères, deviennent presque inabordables pour d'autres formes de conducteurs. Les sphères employées ont été construites en tôles de laiton d'épaisseur telle qu'elles ne pouvaient peser plus de 200 à 250 grammes. Les sphères de 15 et 20 centimètres de dia-

mètre devaient être construites en aluminium, pour conserver un faible poids, ce qui était nécessaire pour l'une au moins des sphères de chaque couple étudié, car, étant suspendue au plateau de la balance, elle ne devait pas l'alourdir trop, afin de lui garder sa sensibilité. La fabrication des sphères présentait de grandes difficultés techniques, mais nous sommes parvenus néanmoins à obtenir des sphères dont les dimensions et la sphéricité étaient exactes à $0^{cm}01$ près, comme j'ai pu m'en assurer par des mesures au moyen d'un sphéromètre de précision.

II. *Les conditions d'isolement.* — Ces conditions étaient de grande importance, car tout le calcul suppose des sphères isolées dans l'espace. Chaque corps se trouvant au voisinage des corps électrisés déforme le champ, et l'action mesurée ne peut, par conséquent, être en concordance avec les valeurs fournies par le calcul. Toutes les expériences faites jusqu'à présent au sujet de vérification directe de la loi de Coulomb avaient été faites dans des cages dont les dimensions dépassaient rarement 50 centimètres. Me proposant de rechercher la valeur absolue de la force s'exerçant entre les conducteurs chargés et non seulement la loi de la variation de cette force, je fus bientôt obligé de renoncer à l'emploi des cages de pareilles dimensions. Je ne donnerai pas les résultats que j'ai obtenus avec des cages cubiques et cylindriques, dont les dimensions allaient jusqu'à $2^{m}50$, car ils furent loin d'être satisfaisants, les perturbations subies étant toujours trop considérables. Je suis arrivé enfin à faire une cage de toute la salle d'un laboratoire, dont la hauteur était de $4^{m}50$ et la surface de $16^{m}13 \times 6^{m}85$. Au début, la balance servant à mesurer les forces avait été placée sur un support suspendu au plafond de ce laboratoire, et cela dans le but de l'éloigner des conducteurs électrisés et de la soustraire aux trépidations. L'expérimentateur effectuant la mesure était également placé sur un pont suspendu à la voûte du plafond. Ainsi il restait un espace libre de 3 mètres de hauteur. Pour voir si, dans ces conditions, on

est à l'abri de perturbations sensibles, j'ai effectué quelques mesures en maintenant deux sphères de rayons $r_1 = 2^{cm}5$ et $r_2 = 7^{cm}5$ à la même distance, mais en plaçant le centre de la grande sphère r_2 à des distances L différentes du parquet du laboratoire. Les résultats ont été bien nets :

Distances L .	65 cm	95 cm	165 cm	190 cm
Forces . . .	$0^{gr}0038$	$0^{gr}0045$	$0^{gr}0060$	$0^{gr}0061$

La force apparente croît à mesure que l'on se rapproche du plafond, ce qui se comprend. C'est l'action des charges induites sur le plafond qui se manifestait. Il en résulte que ce dispositif était encore insuffisant pour le but poursuivi.

Pour augmenter davantage l'espace disponible, on a enlevé ensuite le pont, et la balance a été placée dans une salle de l'étage supérieur. Seul le fil auquel était attachée la sphère descendait au rez-de-chaussée par une ouverture pratiquée dans le plafond. Ainsi donc les sphères se trouvaient dans la cage, dont la plus petite dimension mesurait 4^m50. Toute cette salle avait été bien dégagée et les autres parties de l'installation s'y trouvant avaient été éloignées d'au moins 4 mètres des sphères étudiées.

J'ai tenu à voir si, dans ces conditions, l'influence du plafond et du parquet était encore sensible et, dans ce but, j'ai repris la même couple de sphères que plus haut placées à la même distance des centres et à des distances L différentes. Voici les chiffres obtenus :

L = 190 cm	150 cm	190 cm	240 cm	268 cm
F = $0^{gr}0050$	$0^{gr}0052$	$0^{gr}0053$	$0^{gr}0056$	$0^{gr}0058$;

et pour une autre distance des centres ($12^{cm}5$) :

L = 105 cm	237 cm
F = $0^{gr}0073$	$0^{gr}0077$

On remarque encore une faible action attractive des charges induites, toutefois cette action est minime, car dans le cas cité, le plus défavorable, elle n'était que $0^{gr}0008$ pour une variation de L de 163 centimètres, ce qui, évidemment, n'arrivait jamais dans les mesures.

Mais on peut objecter que ces chiffres indiquent seulement la faible variation de la force parasite, alors qu'elle-même pourtant peut ne pas être négligeable. Il n'en est pas ainsi, comme j'ai pu m'en assurer en comparant les valeurs de la force parasite calculée à celle donnée par la mesure directe.

A cause des grandes distances existantes entre les sphères et le plafond, je puis supposer que les charges des sphères sont concentrées en leurs centres, et je puis rechercher l'influence du plafond considéré comme une surface plane conductrice et indéfinie. Si une charge q se trouve à la distance d de plan en question, elle induit sur ce dernier une couche d'électricité de signe contraire, dont l'action est identique à celle d'une charge $-q$ placée à la distance d de l'autre côté du plan ; $-q$ est appelée l'image électrique de la charge q.

1. Soient deux sphères A_1 et A_2 possédant des charges q_1, q_2; soient d leur distance et l la distance entre A_2 et le plan P. La force mesurée est celle s'exerçant sur A_1. En l'absence du plan P, l'action de deux sphères est donnée par

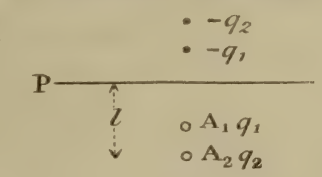


Fig. 6.

$$F = \frac{q_1 q_2}{d^2}.$$

Si on introduit le plan P, chacune des deux charges va induire une couche sur le plan, dont les actions seront identiques aux actions des deux images $-q_1$ et $-q_2$, et, par suite, la force répulsive apparente sera

$$F' = \frac{q_1 q_2}{d^2} + \frac{q_1 q_2}{4(l-d)^2} + \frac{q_1^2}{(2l-d)^2}.$$

La présence du plan P a augmenté la force de

$$F' - F = \frac{q_1 q_2}{4(l-d)^2} + \frac{q_1^2}{(2l-d)^2},$$

que l'on peut toujours calculer et introduire comme terme correctif dans les valeurs obtenues par la mesure directe. C'est d'ailleurs ce que j'ai fait dans tous les cas où cette correction n'était pas absolument négligeable.

Pour s'assurer que la formule correspond aux forces existantes réellement, j'ai eu soin de faire quelques mesures avec une seule sphère placée dans l'espace à différentes distances du plafond ; les valeurs trouvées ont été comparées aux valeurs théoriques.

Voici quelques données :

F calculé =	0gr00032	0gr00011	0gr0006
F observé =	0gr0004	0gr0002	0gr0005

La concordance est satisfaisante vu la difficulté des mesures et la petitesse de la force. Il est a remarquer que la distance entre la sphère la plus proche du plafond et ce dernier dépassait rarement 180 centimètres.

2. Supposons maintenant que A_1 et A_2 portent les charges de signes contraires, q_1 et $-q_2$. La force attractive en l'absence du plan P est

$$F = -\frac{q_1 q_2}{d^2}.$$

La présence du plan P fait apparaître les images $-q_1$ et q_2 de A_1 et A_2, de sorte que la force totale deviendra

$$F' = -\frac{q_1 q_2}{d^2} + \frac{q_1^2}{4(l-d)^2} - \frac{q_1 q_2}{(2l-d)^2},$$

d'où

$$F' - F = \frac{q_1^2}{4(l-d)^2} - \frac{q_1 q_2}{(2l-d)^2},$$

suivant que F′ — F est positif ou négatif la force mesurée doit être augmentée ou diminuée de F′ — F.

Pour donner une idée de la valeur de cette correction, je cite quelques exemples numériques :

Pour deux sphères de même rayon ($r = 7^{cm}5$), chargées au potentiel de ± 8000 volts,

$d = 61^{cm}5$	$l = 224$ cm.	$F' - F = 0^{gr}0001$
$d = 49^{cm}5$	$l = 224$ cm.	$F' - F = 0^{gr}00008.$

Pour deux sphères de même rayon ($r = 10$ centimètres), chargées au potentiel de ± 8000 volts,

$d = 50$ cm.	$l = 252$ cm.	$F' - F = 0^{gr}00009.$

On voit donc que, même pour les sphères de grand rayon et distantes d'un demi-mètre, la correction est négligeable.

Cela n'a pas toujours lieu pour les forces répulsives pour lesquelles il faut bien tenir compte de l'influence du plafond. Ainsi, par exemple, pour deux sphères de même rayon ($r = 7^{cm}5$) chargés au potentiel + 8000 volts,

$d = 61^{cm}5$	$l = 224$ cm.	$F' - F = 0^{gr}00070$
$d = 45$ cm.	$l = 255$ cm.	$F' - F = 0^{gr}00045.$

Par ces quelques exemples, on voit que la perturbation apportée par les corps les plus voisins de nos sphères doit être bien faible et qu'on peut les considérer comme se trouvant dans les conditions exigées par la théorie.

En même temps, ceci nous montre qu'il m'était inutile d'employer la méthode de Lord Kelvin des images successives

sur deux plans entre lesquels se trouvaient les sphères, qui, il est vrai, donne des résultats plus exacts, mais dont la valeur de la correction s'exprime par la somme de trois séries, toutes très lentement convergentes et, par suite, ne se prêtant pas à des calculs numériques.

Suspension des sphères.

Les fils de suspension étaient des fils de soie imprégnés d'ozokérite et dont le diamètre était de $0^{cm}03$. Dans certains cas, où la sphère était trop lourde, on augmentait le nombre de ces fils. La sphère inférieure maintenue fixe a été suspendue sur deux crochets A et B, munis de glissières permettant le

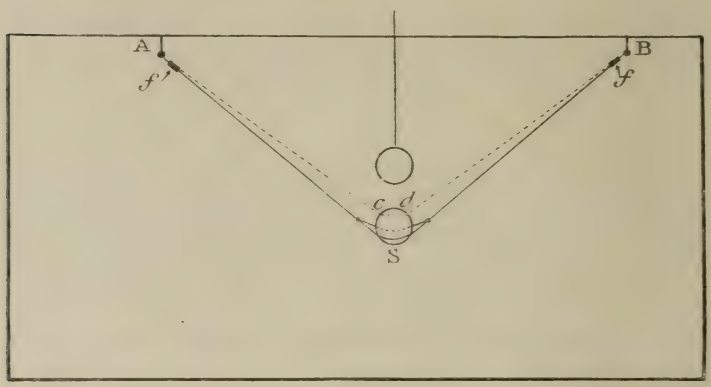


Fig. 7.

déplacement dans une direction perpendiculaire au plan de la figure. De plus, les fils se terminaient par des vis *f* permettant un déplacement équivalent à l'allongement du fil. La sphère a pu être reliée aux fils par deux procédés différents :

a) Au milieu du fil ASB, sur une longueur d'environ 60 à 80 centimètres, le fil a été dédoublé comme l'indique le croquis. Deux fils étant écartés, on les a fixés à la partie inférieure de la sphère en les collant au moyen d'ozokérite qui adhère bien au métal. De cette façon, il n'est pas besoin de faire un

trou dans la sphère comme cela a lieu dans la suspension ci-dessous (*b*).

b) Le fil ASB passe, comme l'indique le trait pointillé, par deux ouvertures *c* et *d* de 0^{cm}05 à 0^{cm}1 de diamètre faites dans la sphère. Cette suspension s'est montrée plus pratique.

Cette sphère inférieure était toujours choisie assez lourde, de façon que l'action du fil au moyen duquel on l'avait chargée (voir plus loin) ne puisse produire des oscillations.

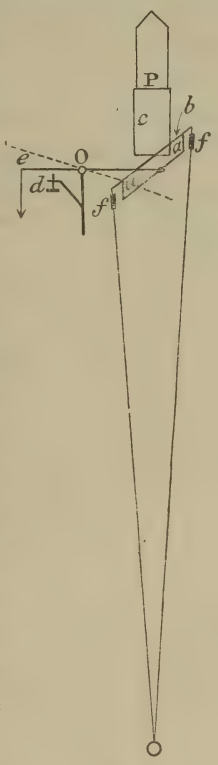


Fig. 8.

Le poids de la sphère supérieure, qui était suspendue à la balance, devrait être nécessairement faible, mais alors chaque rapprochement de fil servant pour la charge l'écartait de sa position d'équilibre et produirait ainsi un mouvement oscillatoire, et la mesure était par suite rendue impossible. Il était donc nécessaire de l'immobiliser au moins dans un plan. Ceci a été atteint au moyen du dispositif suivant. Au plateau P de la balance avait été fixé un cadre rigide *c* en tube d'aluminium. Aux extrémités du tube *b* de ce cadre étaient attachées deux vis *f*, soutenant des fils de soie servant à maintenir la sphère. Le tube *b* pouvait reposer sur deux supports *a* réglables au moyen des vis et fixés à l'extrémité d'un levier pouvant tourner autour de l'axe *o* et dont l'autre bras pouvait être arrêté par un arrêt à vis *d*. En agissant sur le bras *oe*, on pouvait soulever le tube *b*, et, avec lui, la sphère, d'une fraction de millimètre et la maintenir fixe dans cette position. Ce dispositif a donc permis de maintenir la sphère immobile pendant le mouvement du fil de charge, mais aussitôt que la sphère était chargée et le fil éloigné, on abaissait le levier dans la position $c'b'$ et la sphère était alors librement suspendue à la balance. Ainsi, toute oscillation est devenue impossible.

Action du champ sur les fils de suspension.

La première précaution à prendre était celle de garantir la pureté du diélectrique imprégnant les fils de soie et la propreté des fils, car les plus minimes impuretés produisent des perturbations importantes. Ainsi, dans certains cas, la force répulsive de deux sphères chargées d'électricité de même signe a été dépassée par une force attractive bien nette, qui a disparu dès qu'on a échangé les fils de suspension. Pour nos mesures, les fils ont été renouvelés chaque semaine.

Ces fils imprégnés d'ozokérite constituent les corps diélectriques sur lesquels le champ exerce une action tendant à les rapprocher vers les points où le champ est le plus intense. Recherchons l'importance de cette force perturbatrice.

Les composantes F_x, F_y, F_z, de la force pondéromotrice F agissant sur l'unité de volume d'un diélectrique, sont données par les formules générales (*)

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ F_y &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ F_z &= \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}, \end{aligned} \qquad (1)$$

où $A_x \ldots C_z$ dans le champ d'intensité E et dans le cas d'un diélectrique homogène, de constante diélectrique K, sont données par

$$A_x = \frac{K}{8\pi}[E_x^2 - E_y^2 - E_z^2], \qquad B_y = \frac{K}{8\pi}[E_y^2 - E_z^2 - E_x^2],$$

$$C_z = \frac{K}{8\pi}[E_z^2 - E_x^2 - E_y^2], \qquad (2)$$

$$B_x = C_y = \frac{K}{4\pi} E_y E_z, \quad C_x = A_z = \frac{K}{4\pi} E_z E_x, \quad A_y = B_x = \frac{K}{4\pi} E_x E_y,$$

dans le système C.G.S. d'unités électrostatiques.

(*) *Pockels Encykl. d. Math. Wiss.*. Bd V, 2, p. 354.

Supposons, pour plus de simplicité, que nos fils se trouvent dans le champ d'une sphère, ces formules prennent alors une forme plus explicite. Soit R le rayon de la sphère chargée au potentiel V, et x, y, z les coordonnées d'un point de l'espace par rapport aux axes dont l'origine coïncide avec le centre de la sphère, et soit

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Alors

$$E_x = VR\frac{x}{r^3}, \qquad E_y = VR\frac{y}{r^3}, \qquad E_z = VR\frac{z}{r^3},$$

d'où

$$A_x = \frac{K}{8\pi} V^2R^2 \frac{x^2 - y^2 - z^2}{r^6}, \qquad B_y = \frac{K}{8\pi} V^2R^2 \frac{y^2 - z^2 - x^2}{r^6},$$

$$C_z = \frac{K}{8\pi} V^2R^2 \frac{x^2 - y^2 - z^2}{r^6},$$

$$B_x = C_y = \frac{K}{4\pi} V^2R^2 \frac{zy}{r^6}, \qquad C_x = A_z = \frac{K}{4\pi} V^2R^2 \frac{xz}{r^6},$$

$$A_y = B_x = \frac{K}{4\pi} \frac{xy}{r^6}.$$

D'après ces relations, le calcul simple donne

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{3K}{4\pi} V^2R^2 \left[\frac{x}{r^6} - 2\frac{x}{r^8}(2x^2 - y^2 - z^2)\right], \\ F_y &= \frac{3K}{4\pi} V^2R^2 \left[\frac{y}{r^6} - 2\frac{y}{r^8}(2y^2 - z^2 - x^2)\right], \\ F_z &= \frac{3K}{4\pi} V^2R^2 \left[\frac{z}{r^6} - 2\frac{z}{r^8}(2z^2 - x^2 - y^2)\right]. \end{aligned} \qquad (3)$$

Pour le cas de nos expériences, considérons un fil suivant l'axe des z, et auquel est suspendue la sphère chargée; supposons qu'il a la forme cylindrique de rayon ρ et soit l sa lon-

gueur et K sa constante électrique. A cause de la symétrie, $F_x = 0$, $F_y = 0$. Il nous suffira donc de calculer seulement F_z. Nous supposons ici que c'est le champ de la sphère même qui exerce la force pondéromotrice en question, et ainsi la valeur calculée sera nécessairement plus grande qu'elle n'était en réalité. Par suite de la petitesse de ρ, on peut considérer F comme constante dans toute une section du fil perpendiculaire à l'axe des z, et alors on a

$$F_z = \pi\rho^2 \int_R^l F_z dz = \frac{3K}{8\pi} \rho^2 V^2 R^2 \int_R^l \left[\frac{z}{r^6} - 2\frac{z}{r^8}(2z^2 - x^2 - y^2) \right] dz. \tag{4}$$

Dans notre cas, on peut poser

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

donc

$$r = z,$$

et ensuite

$$F_z = \frac{3K}{4\pi} V^2 R^2 \rho^2 \int_R^l \left(\frac{1}{z^5} - \frac{4}{z^5} \right) dz = \frac{9KV^2R^2\rho^2}{16\pi} \left(\frac{1}{l^4} - \frac{1}{R^4} \right), \tag{5}$$

et puisqu'on avait, dans les expériences, deux fils de suspension, la force totale sera

$$F_z = - \frac{9KV^2\rho^2(l^4 - R^4)}{8\pi R^2 l^4}. \tag{6}$$

Le signe — indique qu'il y a une attraction. Remarquons que le passage de (5) à (6) renforce encore l'expression théorique de F_2, car deux fils ont été en réalité écartés et placés donc dans un champ plus faible.

Prenons ce cas de nos mesures où

$$\rho = 0^{cm}015, \qquad l = 200 \text{ cm}, \qquad R = 5 \text{ cm}.$$

La constante K du fil de soie imprégné d'ozokérite ne m'est pas connue et j'admets qu'elle est égale à 2. Pour ces dimensions, on voit qu'on peut négliger R^4 devant l^4 et la formule (6) devient

$$F_z = -\frac{9KV^2\rho^2}{8\pi R^2},$$

ce qui réduit en nombre, pour V = 8000 volts, donne

$$F_z = -0^{gr}00002.$$

Cette perturbation est donc tout à fait négligeable.

Réglage des sphères.

Deux sphères étant suspendues, comme je viens de le dire, il faut les placer à une distance bien connue et de façon que leurs centres soient sur la même verticale. Pour satisfaire à cette dernière condition, on a placé deux cathétomètres soigneusement réglés, distants des sphères de 4 à 5 mètres, de façon que les lignes de visées forment un angle droit, ce qui a permis de ramener toujours le centre de la sphère inférieure sur la droite d'intersection de deux plans verticaux, déterminés par le centre de la sphère supérieure et les axes des deux cathétomètres dont la verticalité était certaine. Pour la mesure de la distance, je me suis servi d'un cathétomètre de précision muni d'un tambour micrométrique donnant facilement 1/200 millimètres. Cet instrument avait été placé sur un socle en maçonnerie. La visée se faisait en ramenant le fil horizontal du réticule de la lunette à être tangent au bord de la sphère. Ce procédé n'a pas permis d'utiliser toute la précision du cathétomètre, et les distances ont été déterminées à $0^{cm}01$ — $0^{cm}02$ près. Il est à remarquer que les fils de soie nouvellement préparés ne conservent pas une longueur constante. Avant de faire les mesures, les fils ont été tendus en y

suspendant des poids pendant quarante-huit heures, et alors seulement ils ont été employés pour les suspensions. Par précaution, après chaque mesure, la distance a été revérifiée et, dans les rares cas où la variation a été observée, je prenais une moyenne.

Procédé de charge.

Pour pouvoir comparer les valeurs des forces observées avec celles données par la théorie, il est nécessaire de connaître exactement la charge fournie aux sphères ou leurs potentiels. C'est ce dernier que j'ai mesuré.

Le procédé de charge et l'évaluation du potentiel des sphères constituent la partie la plus délicate de ces recherches et demandent le plus de soins. Pour obtenir la source d'électricité de deux signes à potentiel assez élevé (8000 à 10000 volts) et maintenu constant pendant quelques heures, un dispositif a été appliqué, dont le schéma est indiqué par la figure 9.

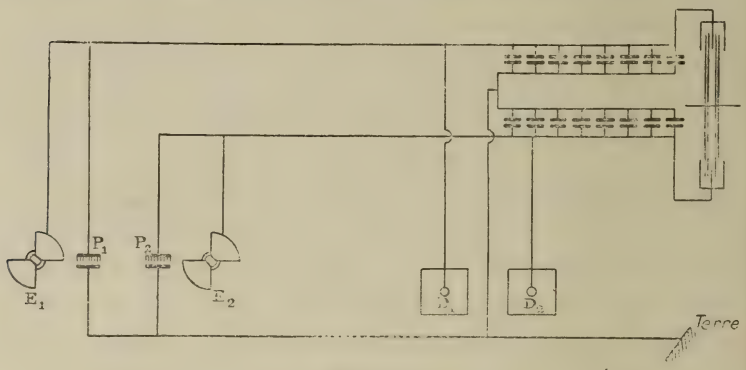


Fig. 9.

Chaque pôle d'une machine de Wimshurst à 4 plateaux, mue par un moteur électrique, communique avec les armatures intérieures de 8 jarres reliées en parallèle, d'une capacité totale de 10^{-2} microfarads; les armatures extérieures sont mises à la terre. Chacune de ces batteries est reliée avec une plaque P, munie

de 36 pointes en platine, devant laquelle est placée une autre plaque métallique mise à la terre; la distance entre les pointes et la plaque peut être modifiée par degrés insensibles au moyen d'une petite crémaillère. En faisant varier cette distance, on agit de même sur la décharge par pointes, et, avec un peu d'habitude, lors de la marche uniforme de la machine, on peut obtenir un potentiel constant à 20 volts près sur 10000 volts. Pour les pointes, il est nécessaire d'employer du platine, car les autres métaux s'oxydent facilement, de sorte qu'après quelques heures les pointes ne fonctionnent plus régulièrement.

Le potentiel a été mesuré au moyen de deux électromètres de Lord Kelvin à cadran verticaux; la lecture se faisait d'après les indications d'un index se déplaçant devant une échelle graduée; j'ai placé sur une partie de cette dernière une bande de miroir, et ainsi on pouvait observer avec beaucoup plus de précision et apprécier notamment 20 volts sur 10000 volts. Cette précision n'est pourtant que relative; on peut l'admettre pour une division donnée de l'électromètre sans toutefois affirmer que cette indication correspond au voltage effectif avec autant de précision, car l'étalonnage ne donnera que 1,5 — 2 % de précision.

Chaque fil reliant les condensateurs avec l'électromètre possède une bifurcation communiquant avec des supports D_1 D_2 parfaitement isolés au moyen d'ébonite et de paraffine.

Tout le circuit était fait de fil de cuivre isolé par du caoutchouc, paraffine, et renfermé dans des tubes en verre. A chaque support D était attaché un boudin en acier à spires d'un rayon

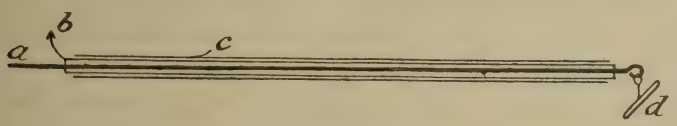


FIG. 10.

de 8 centimètres, dont l'autre extrémité avait été fixée à l'extrémité *a* du fil *ad* (fig. 10), que nous appellerons le fil de charge et qui est placé dans l'axe d'un tube en verre *b*, tube rempli de

paraffine et recouvert extérieurement de feuilles d'étain *c*. Lorsqu'on veut charger la sphère, on prend le tube rigide entourant le fil de charge et on relie ainsi la surface extérieure du tube de verre avec la terre; en tendant le boudin, on approche le pendule à la sphère que l'on touche avec le cylindre *d* du pendule. Ce dernier est un cylindre en sureau métallisé à sa surface et suspendu dans l'anneau K, de façon qu'il reste toujours perpendiculaire au fil *a*. Le contact de la sphère avec le pendule l'a relie avec les condensateurs et son potentiel est alors celui qui est indiqué par l'électromètre correspondant. Le petit cylindre *d* étant suspendu librement donne un léger choc à la sphère qui n'est point par là influencée à cause de la faible masse du pendule.

Évaluation de potentiel effectif de la sphère au moment de la mesure de la force.

Nous avons vu comment on charge la sphère. Si on éloigne le fil de charge après le contact, la sphère reste chargée, mais son potentiel n'est plus celui indiqué par l'électromètre. Au moment du détachement du pendule *d*, la sphère possède une certaine charge au potentiel de l'électromètre, mais lorsqu'on éloigne le fil, il y a diminution de la capacité de la sphère et l'induction de la charge de signe contraire par le fait du mouvement du fil chargé.

L'influence du mouvement du fil de charge sur le potentiel de la sphère est élucidée par la question suivante : Étant donné deux conducteurs, la sphère A isolée et possédant une charge constante et le fil de charge – appelons-le B — maintenu à un potentiel constant, quelle est la variation que subira le potentiel de A si on déplace B? Dans nos expériences, B se subdivise en deux parties : 1° B_1 — le pendule chargé et 2° B_2 — la tige couverte d'étain et reliée constamment à la terre.

L'influence du mouvement de B_2 se voit facilement. Considérons deux états : *a*) A et B_2 sont très rapprochés; *b*) A et B_2

sont séparés par une grande distance. Dans l'état *a*), l'énergie du système est

$$W_a = \frac{1}{2} q_A V_A + \frac{1}{2} q_{B_2} V_{B_2} = \frac{1}{2} q_A V_A,$$

car

$$V_{B_2} = 0.$$

Dans l'état *b*),

$$W_b = \frac{1}{2} q_A V'_A,$$

donc la variation d'énergie est

$$W_a - W_b = \frac{1}{2} q_A (V_A - V'_A).$$

Or, lorsque B_2 est tout près de A, cette dernière induit une charge de signe contraire à celle qu'elle porte elle-même, donc il existe entre A et B_2 une force attractive et, lors du déplacement de B_2, les forces électriques effectuent un travail négatif — T qui est égal à la variation de l'énergie du système, c'est-à-dire

$$-T = \frac{1}{2} q_A (V_A - V'_A),$$

d'où

$$V'_A > V_A,$$

c'est-à-dire que, par le fait de l'éloignement de la tige mis à la terre, le potentiel de la sphère croît.

Pour voir l'influence du mouvement de B_1, appliquons le théorème de Gauss (*) donnant la relation

$$\sum q V' = \sum q' V,$$

(*) *Gauss Werke*, Bd V. « Ueber die im umgekehrten Verhältniss des Quadraten der Entfernung wirksamen Kräfte », § 19, p. 211.

où qV sont les charges et les potentiels dans un certain état, et $q'V'$ dans un autre état d'un système électrique invariable.

Comme premier état, prenons celui où la sphère A est au voisinage de B_1 et, dans ces conditions, soient σ sa densité superficielle et V le potentiel, avec les mêmes données $\sigma_1 V$ pour B. Le deuxième état sera défini par σ' V' sur la sphère et $\sigma_1 = 0$ sur B_1. Le théorème de Gauss donne

$$\int_A V\sigma' dS = \int_A V'\sigma dS + \int_B V'\sigma_1 dS_1.$$

Les surfaces A et B étant conductrices, on a

$$V\int_A \sigma' dS - V'\int_A \sigma dS = V'\int_B \sigma_1 dS_1.$$

Si on suppose A isolé pendant tout le temps, on a de plus

$$\int_A \sigma' dS = \int_A \sigma dS = Q_A,$$

et, par suite,

$$Q_A(V - V') = V'\int \sigma_1 dS_1.$$

Dans le cas qui nous intéresse, les charges de A et de B ont été de même signe, donc

$$\frac{Q_A}{V'\int \sigma_1 dS_1} > 0;$$

il s'ensuit que

$$V' < V.$$

Passons maintenant à un troisième état où B_1 est transporté

hors du champ. Pendant ce passage, la force s'exerçant entre A et B_1 est nulle, car $\sigma_1 = 0$, mais on sait que

$$F = \frac{\partial W}{\partial r},$$

donc

$$\frac{\partial W}{\partial r} = 0,$$

et, par suite,

$$W = c^t.$$

Or, dans notre cas,

$$W = \frac{V'}{2} \int \sigma dS, \qquad (7)$$

par conséquent, la relation (7) entraînera nécessairement

$$V' = c^t.$$

Lors de cette deuxième modification de passage du deuxième état au troisième, le potentiel ne change pas.

Le passage du premier état au troisième correspond précisément au mouvement de fil B_1 dans mes expériences et il a, comme nous le voyons, pour effet de diminuer le potentiel de la sphère. Nous avons vu que l'éloignement du tube mis à la terre qui entoure le fil de charge a pour effet d'augmenter le potentiel; les deux causes perturbatrices agissent donc dans un sens contraire.

Et c'est la raison pour laquelle le fil de charge a été construit de la façon indiquée plus haut. Dans mes expériences, la partie du fil de charge sortant du tube protecteur n'était que très petite, et cela dans le but de diminuer autant que possible son influence et aussi la chute du potentiel qui en résulte.

Au contraire, le tube protecteur était comparativement gros et long et il protégeait parfaitement la sphère contre l'influence du fil qui s'y trouvait, comme le ferait un cylindre de Faraday, et, de plus, l'effet dû à son propre éloignement était toujours plus grand que celui du pendule restant libre, c'est-à-dire que l'éloignement du fil de charge de la sphère a été toujours accompagné d'une augmentation de potentiel de cette dernière, ainsi que j'ai pu m'en assurer pendant toute la durée du travail.

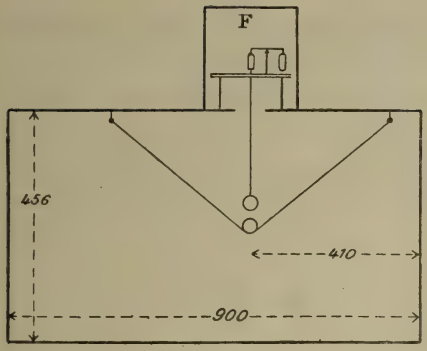
Une dernière remarque au sujet des considérations que je viens d'énoncer. Dans le troisième état que nous avons envisagé, B_1 ne porte pas de charge, tandis que dans les expériences, il reste chargé au potentiel V.

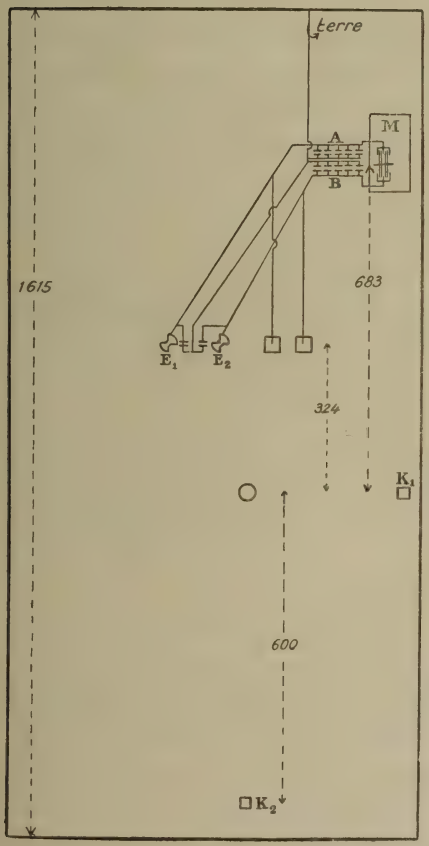
Pour ne pas négliger ce petit détail, remarquons que lorsque B_1 est théoriquement éloigné à l'infini, si nous le chargeons au potentiel V, on voit que cette charge ramenant le cycle théorique à celui ayant lieu dans les expériences ne change en rien le potentiel de la sphère A.

Les corrections à introduire à cause des perturbations du potentiel que nous venons d'analyser seront données plus loin.

Mesure des forces.

Pour mesurer la force qui s'exerçait entre deux sphères électrisées, je me suis servi d'une balance de précision de sensibilité de $0^{gr}0001$ près. Le mouvement de l'aiguille était observé au moyen d'une lunette permettant de suivre les plus petits déplacements. Ainsi que j'en ai fait la remarque plus haut, la balance était placée à l'étage surmontant le laboratoire des mesures. Afin d'éviter le mouvement de l'air dans l'ouverture entre la salle d'en bas et celle d'en haut, la balance était entourée de cloisons formant une petite chambre mesurant $280 \times 200 \times 180$ centimètres, qui était tapissée intérieurement et qui communiquait avec la salle inférieure par une ouverture de 280×68 centimètres. Dans certains cas, cette précaution n'était pas encore suffisante et il était nécessaire de





M : la machine de Wimshurst.

A et B : les deux batteries de condensateurs.

E_1 et E_2 : les électromètres.

K_1 et K_2 : les cathétomètres de réglage.

F : la chambre de la balance.

Fig. 11.

placer dans la chambre de la balance un poêle à gaz permettant de maintenir une température plus élevée d'environ 5 à 10 degrés, l'air étant alors moins dense dans la chambre; sa circulation vers le bas était ainsi écartée.

La disposition relative de plusieurs parties de l'installation est montrée par la figure 11, où sont indiquées également les dimensions générales.

Méthode et corrections des mesures.

Comme je viens de le montrer, la mesure de la distance entre les sphères se faisait aisément, l'influence de fils de suspension était négligeable, l'influence des objets environnants, dont le plus proche était le plafond, était aussi très minime (sauf les cas extrêmes). Voyons maintenant comment on a évalué le potentiel correspondant au moment de la mesure de la force. Nous avons vu que l'éloignement du fil chargé avait pour effet de diminuer le potentiel de la sphère, l'éloignement du cylindre de Faraday qui l'entourait provoquait, au contraire, son augmentation. De plus, il s'ajoute encore une 3^{me} perturbation, entraînée, notamment, par la diminution du potentiel par décharge lente, due à la présence des ions dans l'air. Pour mesurer ces diverses perturbations, j'ai procédé de la façon suivante :

Imaginons d'abord deux sphères de même rayon, mises en présence et électrisées toutes deux par des charges de mêmes signes ou de signes contraires. A cause de la symétrie, les perturbations pour les sphères seront les mêmes et on peut, par suite, limiter les mesures à une sphère.

Au-dessous de la sphère inférieure, et à une distance d'environ 100 centimètres, était placé un électromètre de Lord Kelvin, dont les cadrans étaient reliés avec un fil de cuivre s'engageant à l'intérieur d'une tige rigide en diélectrine à l'extrémité supérieure de laquelle il plonge dans du mercure, dont quelques gouttes remplissent et par leur convexité surpassent les bords d'une petite excavation pratiquée dans la tige en diélectrine et destinée à ce mercure. L'électromètre muni de ce

conducteur était placé sur un pied très stable, pouvant être déplacé dans le sens vertical d'une façon uniforme par l'action d'une vis et on pouvait ramener ainsi le ménisque convexe du mercure en contact avec la sphère sans que la position mutuelle des sphères soit changée. L'électromètre indiquait alors tous les changements du potentiel se produisant dans le système. Soient c la capacité de l'électromètre comptée jusqu'au niveau du mercure dans la tige, dont j'ai parlé tantôt, S la capacité de la sphère placé à une distance déterminée de l'autre sphère, S′ la capacité de la sphère en présence de la tige de charge, V le potentiel indiqué par l'électromètre relié aux armatures des condensateurs.

Lorsque les sphères sont en contact avec les fils de charge, l'électromètre relié avec la sphère inférieure indique le potentiel V; au moment où l'on éloigne les fils de charge, le potentiel change brusquement et prend la valeur V′ qui sera déterminée par l'équation

$$V(S' + c) - q = V'(S + c), \qquad (8)$$

en désignant par q la valeur équivalente à la perte de charge produite par l'éloignement de la partie du fil appelé plus haut B_1.

La relation (8) suppose que la capacité du système — sphère plus électromètre — est égale à la somme des capacité de la sphère et de l'électromètre prises séparément; ceci n'est vrai qu'approximativement, mais ne s'écarte pas trop, dans notre cas, de la réalité.

En divisant ces deux parties de (8) par S, on a

$$V\left(\frac{S'}{S} + \frac{c}{S}\right) - \frac{q}{S} = V'\left(1 + \frac{c}{S}\right). \qquad (9)$$

Supposons maintenant que l'on éloigne l'électromètre et que les sphères soient isolées, on aura, en répétant la même opération,

$$\begin{aligned} VS' - q' &= V''S, \\ V\frac{S'}{S} - \frac{q'}{S} &= V'', \end{aligned} \qquad (10)$$

en désignant par V'' le potentiel de la sphère immédiatement après l'éloignement du fil de charge. Les dimensions de la partie du fil de charge extérieure au cylindre de protection ne mesurant que 4 centimètres environ ; de plus, le fil étant de faible diamètre, le champ correspondant créé n'est sensible qu'à une petite distance, et, par suite, si le fil est en contact avec la sphère, l'action directe de son champ sur le fil reliant la sphère avec l'électromètre est absolument négligeable, ce qui a été vérifié expérimentalement de la façon suivante : L'électromètre restant en place, on a écarté les sphères et on a approché les deux fils de charge dans leur position répondant au cas où l'on charge deux sphères. En touchant la surface convexe du mercure au moyen d'un des fils, on ramène l'électromètre au potentiel de la batterie des condensateurs. En éloignant ensuite les fils de charge, on voit l'aiguille de l'électromètre reculer un peu pour descendre ensuite lentement, à cause d'une déperdition par les ions de l'air. Cette expérience montre que, même dans les cas les plus désavantageux, la partie de la quantité q provenant de l'action directe sur l'électromètre est négligeable, ce qui nous amène à poser

$$q = q',$$

et, dans ces conditions, (9) et (10) fournissent

$$V'' = V' + \frac{c}{S}(V' - V). \qquad (11)$$

La formule (11) nous donne le potentiel V'' immédiatement après l'éloignement du fil de charge ; or, la mesure ne peut se faire qu'un certain temps τ après, et, pendant ce temps, le potentiel V'' baisse encore par le fait de la décharge lente par les ions de l'air. Soit $\Delta_1 V$ la chute du potentiel de la sphère dans les conditions de la mesure et pendant le temps τ, le potentiel correspondant effectivement à la mesure de la force est alors donné par

$$V_e = V'' - \Delta_1 V = V' + \frac{c}{S}(V' - V) - \Delta_1 V. \qquad (12)$$

C'est cette valeur V_e que j'appelle le *potentiel effectif*.

Toutefois, pour pouvoir calculer V_e d'après (12), il faut connaître V' $\Delta_1 V$ et $\frac{C}{S}$.

Détermination du rapport $\frac{C}{S}$. — Les deux sphères étant placées à une distance déterminée, on installe en dessous l'électromètre de telle façon que le ménisque convexe du mercure soit distant de 1 centimètre environ de la sphère inférieure. Pour diminuer la déperdition, dont on a d'ailleurs toujours tenu compte, on remplit la chambre de fumée du tabac pour alourdir les ions et diminuer leur mobilité (*) ; de plus, on opère à des potentiels inférieurs à 5000 volts, où la sensibilité de l'électromètre est double. Le régime habituel de marche de la machine étant établi, on relie l'électromètre avec les condensateurs et on le laisse ainsi pendant dix minutes, afin de polariser complètement les parties diélectriques de l'instrument. Après avoir enlevé les connexions avec les condensateurs, un observateur installé en face de l'électromètre et muni d'un chronomètre battant le 1/5 de seconde suit le mouvement de l'aiguille, tandis que son aide fait monter tout l'électromètre au moyen d'une vis. Tant que le ménisque de mercure ne touche pas la sphère, l'aiguille descend à peine, mais, au moment du contact, la charge se répand sur la sphère et le potentiel tombe brusquement. Au même moment, l'observateur déclanche son chronomètre. Les oscillations de l'aiguille provoquées par le changement brusque du potentiel sont arrêtées et, lorsque l'équilibre est atteint, l'observateur fait la lecture au chronomètre. Soient V_1 l'indication de l'électromètre au moment de la chute et V_2 après le temps τ, indiqué par le chronomètre et séparant deux lectures. Pendant ce temps τ, l'électromètre est en connexion métallique avec la sphère et perd sa charge d'une façon continue par les ions de l'air. Soit $\Delta_2 V$ la chute occasionnée de ce

(*) H. Schering, *Der Elster Geitelsche Zerstreuungsapparat und...* (Dissertation Göttingen), 1906, p. 29.

chef. De plus, tenant compte de ce que les capacités de l'électromètre pour les deux potentiels sont C_1 et C_2, on a la relation

$$V_1 C_1 = (V_2 + \Delta_2 V)(C_2 + S). \tag{13}$$

Toutefois, C_1 diffère peu de C_2 et nous pouvons admettre que, dans un petit intervalle, elles sont égales à la moyenne $C = \frac{C_1 \times C_2}{2}$ et, ainsi, on obtient, de (13),

$$\frac{C}{S} = \frac{V_2 + \Delta_2 V}{V_1 - V_2 - \Delta_2 V}. \tag{14}$$

La valeur $\frac{C}{S}$, ainsi obtenue, se rapporte seulement à une division déterminée de l'électromètre.

On abaisse ensuite l'électromètre pour rompre le contact avec la sphère et on décharge cette dernière. Ainsi, on se trouve de nouveau dans les conditions d'avant la première mesure, mais le potentiel de l'électromètre est plus bas. On répète les mêmes opérations et observations, ce qui fournit une nouvelle valeur de $\frac{C}{S}$ correspondant à une autre division de l'électromètre.

On parcourt ainsi l'échelle tout entière de l'électromètre en déterminant des valeurs de $\frac{C}{S}$ à des positions différentes de l'aiguille et en maintenant S invariable, c'est-à-dire un couple de sphères déterminées, placées à une distance fixe. La même série d'observations est répétée plusieurs fois et les chiffres obtenus servent à tracer une courbe de rapports $\frac{C}{S}$ en fonction des divisions de l'électromètre. Cette courbe est nécessaire, car les mesures directes donnent les valeurs de $\frac{C}{S}$ se rapportant à des divisions différentes de l'échelle de l'électromètre et, de plus, elles nivellent légèrement les erreurs expérimentales. Elles fournissent, enfin, la valeur de $\frac{C}{S}$ pour n'importe quelle division de l'électromètre et pour un S donné.

On change alors la distance entre les deux sphères, ce qui fait varier S, et on répète la même série d'observations fournissant une nouvelle courbe du rapport $\frac{C}{S}$.

Ayant obtenu 6 ou 7 telles courbes correspondant à 6 ou 7 distances différentes des sphères, on mesure, sur chacune d'elles, la valeur de $\frac{C}{S}$ pour la déviation de l'échelle correspondant au potentiel auquel on charge les sphères pour la mesure des forces. Ces valeurs sont portées sur une nouvelle courbe où on donne en abscisses les distances entre les sphères et en ordonnées les valeurs ci-dessus de $\frac{C}{S}$. C'est seulement cette dernière courbe qui fournit directement la valeur de rapport $\frac{C}{S}$ qui doit être portée dans la formule (12).

Il nous reste à indiquer le procédé de mesure de $\Delta_1 V$ $\Delta_2 V$ et V'.

Supposons l'électromètre amené en contact avec la sphère et chargé à un potentiel un peu plus élevé à celui auquel on travaille habituellement. La déperdition lente sur tout le système se manifeste par la descente continue de l'aiguille de l'électromètre, dont le mouvement est suivi par un observateur muni d'un chronomètre et qui note les indications de l'électromètre dans des espaces réguliers de temps. Le tableau ainsi obtenu permet de calculer la chute du potentiel $\Delta_2 V$ causée par des déperditions dans le système comprenant l'électromètre et la sphère pendant le temps donné τ. Supposons maintenant l'électromètre pris isolément et effectuons les mêmes mesures. Ces observations permettent de calculer la chute du potentiel $\Delta_3 V$ sur l'électromètre seul pendant le même temps τ.

Or, la perte totale du système composé de l'électromètre et de la sphère est égale à la somme des pertes partielles subies par l'électromètre et la sphère pris isolément, donc $\Delta_1 V$ sera déterminé par l'équation

$$\Delta_2 V(C + S) = \Delta_1 V \cdot S + \Delta_3 V \cdot C,$$

d'où

$$\Delta_1 V = \frac{C}{S}(\Delta_2 V - \Delta_3 V) + \Delta_2 V. \qquad (15)$$

Quant à V', il n'est pas donné directement par la lecture, car cette dernière ne peut se faire qu'un certain temps après l'éloignement du fil de charge et, pendant ce temps, le potentiel diminue un peu. Si on fait la lecture $\tau^{sec.}$ après l'éloignement, la déperdition provoque la chute $\Delta_2 V$, et, par suite, la lecture donne le potentiel V_0 qui permet de déterminer V' par la relation

$$V' = V_0 + \Delta_2 V. \tag{16}$$

La formule (12) devient ainsi

$$V_e = V_0 + \frac{C}{S}(V_0 - V + \Delta_2 V) + \Delta_2 V - \Delta_1 V, \tag{17}$$

où toutes les valeurs sont mesurables expérimentalement.

Les valeurs de V et $\frac{C}{S}$ sont toujours invariables, mais $\Delta_1 V$, $\Delta_2 V$ et, par suite, V_0 varient d'un jour à l'autre et doivent être déterminées le jour où l'on mesure la force.

La marche d'une série d'expériences est donc la suivante :

Ayant choisi un couple de sphères de même rayon, on détermine la courbe des valeurs de $\frac{C}{S}$ en fonction des distances entre leurs centres. Les fils de suspension étant préalablement bien tendus, on règle la position ainsi que la distance entre deux sphères. Cela étant, on place l'électromètre au-dessous des sphères et, par les observations décrites ci-dessus, on détermine V_0, $\Delta_2 V$, $\Delta_3 V$, qui ne sont vraies que pour la distance donnée et pour ce jour seulement. On écarte ensuite l'électromètre et on mesure la force s'exerçant entre les sphères. L'observateur mesurant les forces, muni d'un chronomètre battant le 1/5 de seconde, immobilise la sphère suspendue à la balance, comme je l'ai indiqué plus haut. Son aide, veillant sur la constance de voltage, rapproche, à un moment donné, les fils de charge et, par contact, charge les sphères. Au moment de l'éloignement des fils de charge, l'observateur placé devant

la balance déclanche le chronomètre et ensuite rend la liberté à la sphère, mais ne décale la balance que huit secondes plus tard. La visée de l'aiguille de la balance au moyen de la lunette permet de s'assurer en quatre ou cinq secondes si la force, d'origine électrique, est équilibrée par les poids placés d'avance sur le plateau de la balance, et, conformément à l'indication, on ajoute ou on soustrait un poids. On charge de nouveau et on observe de nouveau l'aiguille. En répétant un certain nombre de fois la même opération, en chargeant chaque fois de la même façon, on arrive à trouver deux valeurs a et b, telles que la force cherchée f soit comprise entre elles, c'est-à-dire que

$$a < f < b,$$

mais

$$b - a \leq 0{,}0005 \text{ gr.},$$

on prend alors pour la valeur de la force la moyenne

$$f_1 = \frac{b + a}{2}.$$

Dix au moins et, dans les cas plus difficiles, jusqu'à cinquante valeurs ainsi obtenues de f sont prises pour calculer la moyenne d'une série. Après chaque série, les sphères étant déchargées, on équilibre de nouveau la balance et soit f' le poids correspondant. Alors, la force, d'origine électrique, est donnée par la différence

$$F = \frac{\Sigma f}{m} - f'.$$

Une série de mesures étant terminée, on change la distance entre les sphères, on reprend la mesure de V_0, $\Delta_2 V$, $\Delta_5 V$, de F et ainsi de suite.

Il est à remarquer que pendant la durée du travail la salle a toujours été fermée, car chaque fois que la porte était ouverte

et que l'air nouveau s'introduisait, $\Delta_2 V$ et $\Delta_5 V$ étaient modifiées, ce qui a d'ailleurs été également remarqué par Schering (*) dans ses recherches.

Comme on le voit, la méthode de travail était très pénible, mais elle permettait de tenir compte quantitativement de toutes les perturbations.

Chute de potentiel le long du circuit.

Le circuit de l'électromètre au fil de charge ayant environ 7 mètres de longueur, on peut se demander si le potentiel à l'extrémité du fil est bien celui indiqué par l'électromètre. Or, en chargeant le deuxième électromètre par contact avec le fil de charge, j'ai pu m'assurer que, si cette chute existait, elle était inférieure à 20 volts.

Données théoriques.

Je ne traiterai pas ici le problème général des deux sphères, mais je donnerai cependant les formules dont je me suis servi dans les calculs. Parmi les multiples formules données par différents auteurs, il a fallu choisir celles qui sont le plus facilement évaluables en chiffres, et j'ai été même amené à employer des formules différentes pour les différentes distances. J'ai profité également des tables fournies par Russel et Lord Kelvin, qui m'ont donné, dans certains cas, les valeurs des coefficients.

Tout récemment, A. Russel (**) a indiqué une solution très simple pour l'action mécanique de deux sphères placées à une petite distance l'une de l'autre. L'auteur part de l'expression de l'énergie de deux sphères et, en développant un théorème

---

(*) *Loc. cit.*

(**) Alexander Russel, *The coefficients of capacity and the mutual attraction or repulsion of two electrified spherical conductors when close together.* (Proc. Roy. Soc. London (A), 82, pp. 524-531, 1909.)

mathématique étudié pour la première fois par Schlömilch (*), il obtient une grande simplification dans l'expression de cette énergie. Ses formules sont assez facilement évaluables en chiffres pour le cas où les sphères sont très rapprochées. Soit W l'énergie électrique du système de deux sphères de rayons a et b, dont les potentiels sont respectivement v_1 et v_2, on sait que

$$W = \frac{1}{2} k_{11} v_1^2 + \frac{1}{2} k_{22} v_2^2 + k_{12} v_1 v_2,$$

où k_{11} k_{12} k_{22} sont les coefficients de capacité. Si on désigne par x la plus petite distance entre les sphères et par c la distance entre leurs centres,

$$x = c - a - b;$$

on aura, pour la valeur de la force F, l'expression

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\left(\frac{1}{2} v_1^2 \frac{\partial k_{11}}{\partial x} + \frac{1}{2} v_2^2 \frac{\partial k_{22}}{\partial x} + v_1 v_2 \frac{\partial k_{12}}{\partial x}\right).$$

Si W augmente avec x, c'est-à-dire lorsque les charges sont des signes contraires, F est négative, c'est-à-dire que la force est attractive, et si F est positive, la force est répulsive.

Pour le cas de sphères égales et les distances x petites devant $2a$, les formules de Russel donnent

$$\begin{aligned} -\frac{\partial k_{11}}{\partial x} &= -\frac{k_{11}}{\lambda^2}\left(\frac{c}{4} - \frac{\lambda}{\omega}\right) + \frac{1}{\omega^2}\left[1 + \frac{\omega^2}{72}\right. \\ &\left. + \frac{49\omega^4}{86400} + \frac{961\omega^6}{20321280} + \frac{16129\omega^8}{2322432000} + \frac{261121\omega^{10}}{1618642206 72}\right], \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial x} &= -\frac{k_{12}}{\lambda^2}\left(\frac{c}{4} - \frac{\lambda}{\omega}\right) + \frac{1}{\omega^2}\left[1 - \frac{\omega^2}{36}\right. \\ &\left. - \frac{7\omega^4}{10800} - \frac{31\omega^6}{635040} - \frac{127\omega^8}{18144000} - \frac{511\omega^{10}}{316141056}\right]; \end{aligned} \qquad (18)$$

(*) *Zeitschr. f. Math. und Phys.*, 27, p. 673, 1886.

en déterminant λ, ω, k_{11}, k_{12}, par les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^2 = ax + \frac{x^2}{4} \qquad \omega = 2lg_e\left[\frac{\lambda}{a} + \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{a^2}}\right], \\
&k_{11} = \frac{\lambda}{\omega}\left[2{,}6566572 - lg\omega - \frac{\omega^2}{144} - \frac{49\omega^4}{345600}\right. \\
&\left. - \frac{961\omega^6}{124927680} - \frac{16129\omega^8}{18579456000} - \frac{261121\omega^{10}}{1618642206720}\right] \\
&-k_{12} = \frac{\lambda}{\omega}\left[1{,}2703628 - lg\omega + \frac{\omega^2}{72} + \frac{7\omega^4}{43200}\right. \\
&\left. + \frac{31\omega^6}{3810240} + \frac{127\omega^8}{14515200} + \frac{511\omega^{10}}{3161410560}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Dans son mémoire, Russel donne un petit tableau des valeurs de $-\frac{1}{2}\frac{\partial k_{11}}{\partial x}$ et de $\frac{1}{2}\frac{\partial k_{12}}{\partial x}$.

Ces formules ne peuvent pourtant servir que pour des distances très petites, pour des distances plus grandes il est nécessaire d'employer la formule donnée par Lord Kelvin (*), en application de sa belle méthode des images électriques, combinée avec celle des influences successives de Murphy. Le problème de la distribution ne nous intéressant pas directement, j'indiquerai seulement la voie suivie et le résultat obtenu. Soient S_a et S_b les deux sphères, a et b leurs rayons. La méthode de Murphy consiste à déterminer une série de couches successives de la manière suivante : On met sur la sphère S_a une couche capable de donner un potentiel 1, couche uniforme dont la masse sera désignée par a. Cette couche agit à l'extérieur comme si elle était concentrée au centre A de la sphère S_a. On la fixe et on détermine la couche induite sur la surface de la seconde sphère S_b non isolée, ce qui revient à déterminer l'image A′ par rapport à S_b d'une masse $+ a$ en A. On fixe ensuite la couche équivalente à A′ et on détermine son

(*) W. Thomson, *Reprint of papers*, § 138.

influence sur la sphère S_a non isolée, c'est-à-dire la nouvelle image A'' de A', et ainsi de suite. On répète la même opération, en commençant par la sphère S_b, et on multiplie par des coefficients convenables toutes les masses ainsi déterminées. Chacune des masses et des densités pouvant être calculée exactement, on en déduit la loi de distribution finale. La distribution étant connue, on trouve l'action réciproque de deux sphères en cherchant l'expression de l'énergie du système, dont la dérivée par rapport à c donne la valeur de la force. En procédant ainsi, Lord Kelvin a trouvé

$$F = \frac{1}{2}\left\{ v_1^2 \frac{d}{dc}\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \cdots\right) - 2v_1v_2 \frac{d}{dc}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots\right) + v_2^2 \frac{d}{dc}\left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \cdots\right)\right\}, \tag{20}$$

avec la notation

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{a}, \quad P_2 = \frac{c^2 - b^2}{a^2 b}, \quad P_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} P_n - P_{n-1}, \\ Q_1 &= \frac{1}{b}, \quad Q_2 = \frac{c^2 - a^2}{ab^2}, \quad Q_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} Q_n - Q_{n-1}, \\ S_1 &= \frac{c}{ab}, \quad S_2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} S_1, \quad S_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} S_n - S_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Les formules résolvant la question sont toutefois d'un emploi très pénible.

Pour le cas de sphères égales,

$$P_n = Q_n$$

et F prend la forme

$$F = 2Bv_1v_2 - A(v_1^2 + v_2^2), \tag{22}$$

F étant positif pour la répulsion et négatif pour l'attraction.

Les constantes A et B peuvent être calculées au moyen de formules indiquées plus haut et dont un certain nombre sont données dans une table de Lord Kelvin (*) pour la valeur de $\frac{x}{a}$ allant jusqu'à 2.

Pour les distances plus grandes et les sphères de même rayon, on peut se contenter de la formule approchée de Mascart (**), qui a simplifié la formule de Lord Kelvin en admettant que les images successives provenant de l'induction mutuelle de deux sphères soient concentrées aux points conjugués du centre de chaque sphère par rapport à l'autre. Soient deux sphères S_1 et S_2 de même rayon a, chargées aux potentiels v_1 et v_2 et dont la distance des centres $c = da$.

La charge initiale de S_2 a son image de charge $-\frac{a}{d} v_2$ en un point A situé sur la ligne des centres de S_1 et S_2 et à une distance $\frac{a^2}{c}$ du centre de S_1. L'image de la charge de S_1 de charge $-\frac{a}{d} v_1$ est en un point B à la distance $\frac{a^2}{c}$ du centre de S_2. L'image de A, d'après l'hypothèse de Mascart, sera en B et aura une charge $+\frac{a}{(d^2-1)} v_1$.

La $n^{ième}$ image en A aura la charge

$$(-1)^n \frac{a d^{n-2}}{(d^2-1)^{n-1}} v_1$$

et la $n^{ième}$ image en B aura la charge

$$(-1)^n \frac{a d^{n-2}}{(d^2-1)^{n-1}} v_2$$

pour n pair, l'inverse aura lieu pour n impair.

Faisant la somme de toutes ces images, on peut considérer

(*) W. Thomson, *Reprint of papers...*, § 142.

(**) Mascart, *Sur l'action réciproque de deux sphères électrisées.* (Journ. de Ph., 1884, p. 165.)

l'action réciproque de deux sphères comme la résultante des actions s'exerçant entre leurs charges propres concentrées aux centres et leurs images respectives. On obtient ainsi

$$F = \frac{v_1 v_2}{d^2} - \frac{\left(v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2 \frac{2d}{d^2-1}\right) d}{(d^2+d-1)(d^2-d-1)} + \frac{\{v_1 v_2[(d^2-1)^2+d^2] - (v_1^2+v_2^2)d(d^2-1)\{(d^2-1)^2}{(d^2-2)^2[(d^2-1)^2-d^2]^2}. \quad (23)$$

Dans nos expériences, on avait toujours soit $v_1 = v_2 = V$; soit $v_2 = -v_1 = -V$.

Dans le premier cas, la formule générale ci-dessus devient

$$F_1 = V^2 \left\{ \frac{1}{d^2} - \frac{2d}{(d^2-1)(d^2+d-1)} + \frac{(d^2-1)^2}{(d^2-2)^2(d^2+d-1)^2} \right\}. \quad (24)$$

C'est la formule pour la répulsion.

Dans le deuxième cas, on obtient

$$F_2 = -V^2 \left\{ \frac{1}{d^2} + \frac{2d}{(d^2-d-1)(d^2-1)} + \frac{(d^2-1)^2}{(d^2-2)^2(d^2-d-1)^2} \right\}. \quad (25)$$

Dans le travail de Mascart, qui donne la formule (24), celle-ci contient des fautes d'impression, et c'est pour cela qu'elle diffère de (24). Cette dernière n'est applicable que pour des distances telles que $d > 4$, mais à partir de cette valeur ses résultats sont suffisamment exacts. Ainsi, par exemple, pour $d = 4$, $V = 8000$ volts, la formule (24) donne la valeur $F_1 = 0^{gr}0273$, tandis que la formule exacte de Lord Kelvin donne $F_1 = 0{,}027284$.

Et même, pour faciliter les calculs on peut se borner à quelques termes d'un développement en série

$$F_1 = \frac{V^2}{(d+1)^2} \left\{ 1 - \frac{2}{d^2}\left(2 - \frac{1}{d} + \frac{4}{d^2} - \frac{7}{d^3} + \cdots\right) \right\}. \quad (26)$$

En limitant la série au terme $\frac{7}{d^3}$, on obtient $F_1 = 0{,}027277$, valeur qui ne diffère que 0,025 % de la valeur exacte.

La formule (25), pour les forces attractives, ne peut être employée pour $d = 4$, car, pour cette valeur, elle donne un écart allant jusqu'à 4,7 % de la valeur exacte. Elle n'est applicable avec une précision suffisante qu'à partir de $d = 6$.

Ainsi donc, il est plus commode d'employer pour de petites distances les formules de Russel, pour des distances plus grandes jusqu'à $d = 4$ celle de Lord Kelvin. Pour des distances plus grandes encore la formule de Mascart est suffisamment exacte.

Résultats expérimentaux.

I. — *Action répulsive.*

1. *Deux sphères de même rayon* ($r_a = r_b = 10$ centimètres). — Pour montrer le chemin suivi, je donne également les déterminations du rapport $\frac{C}{S}$, dont la connaissance est nécessaire pour l'évaluation du potentiel effectif. Les résultats de mesures effectuées de la façon indiquée plus haut sont inscrits dans le tableau I. Rappelons que x désigne la distance entre les deux points les plus rapprochés de deux sphères, D_c la division de l'électromètre qui correspond à la capacité C de ce dernier (voir formule 14).

Ces chiffres ont servi à tracer les courbes des variations du rapport $\frac{C}{S}$ en fonction de la position de l'aiguille de l'électromètre et qui sont représentées par les figures 12, 13, 14.

J'ai toujours travaillé avec le potentiel de 8000 volts, ce qui correspond à la division 40 de l'électromètre. Dans les courbes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, on relève les valeurs de $\frac{C}{S}$ correspondant à la division 40, et on les porte sur un diagramme représenté par la figure 15 ; sur l'axe des abscisses sont portées les distances x et sur l'axe des ordonnées les valeurs correspondantes du rapport $\frac{C}{S}$ que j'ai rassemblées dans le tableau II. (Voir p. 142.)

TABLEAU I.

$x = 0{,}46$		$x = 3{,}52$		$x = 8{,}01$		$x = 17{,}64$		$x = 33{,}31$	
D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$
42,3	3,86	43,0	4,33	41,6	4,22	44,5	4,44	45,5	5,42
30,9	3,74	22 6	3,77	30,9	4,46	33,3	4,19	36,0	5,04
22,2	3,46	16,7	3,47	37,0	4,44	24,9	4,39	28,2	4,53
43,0	4,23	44,2	4,89	27,9	4,31	18,6	4,40	21,5	4,51
44,6	4,14	33,0	3,90	20,8	4,02	44,3	4,53	44,9	5,33
33,5	4,02	24,0	3,72	41,0	4,62	33,2	4,41	35,3	5,01
24,9	3,78	17,6	3,69	30,6	4,21	25,0	4,50	27,7	4,62
18,2	3,74	36,4	4,11	22,5	4,00	18,8	4,33	21,0	4,39
32,5	3,56	26,9	4,06	43,2	4,19	44,3	4,64	45,1	5,21
23,6	3,74	19,6	3,86	32,8	4,12	33,6	4,44	35,3	4,90
17,1	3,48	42,1	4,23	24,1	3,96	25,4	4,39	20,0	4,40
43,5	3,93	31,2	4,02	17,5	3,19	19,0	4,25	—	—
31,7	3,67	22,5	3,92	42,9	4,06	45,0	4,50	—	—
22,6	3,70	16,5	3.53	31,8	4,17	33,9	4,34	—	—
Courbe *a* fig. 12		Courbe *b* fig. 13		Courbe *c* fig. 12		Courbe *d* fig. 14		Courbe *e* fig. 13	

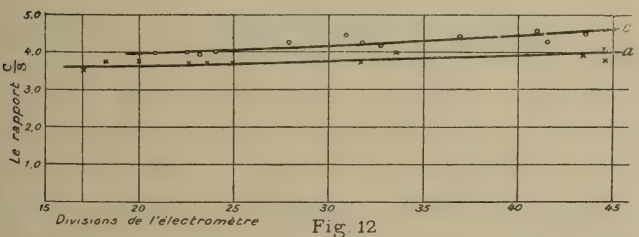


Fig. 12

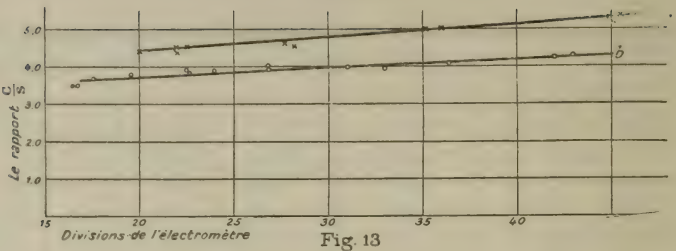


Fig. 13

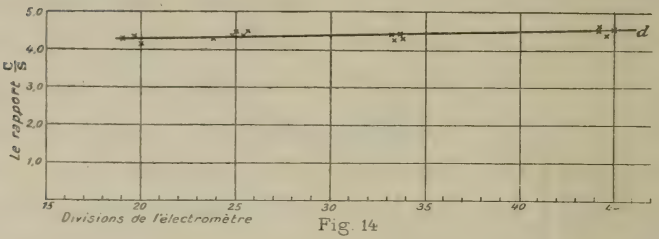


Fig. 14

TABLEAU II.

	x	0,46	3,52	8,01	17,64	33,31
$\frac{C}{S}$	Division 40.	3,90	4,20	4 48	4,52	5,10
	Division 30.	3,75	3,97	4,20	4,40	4,80

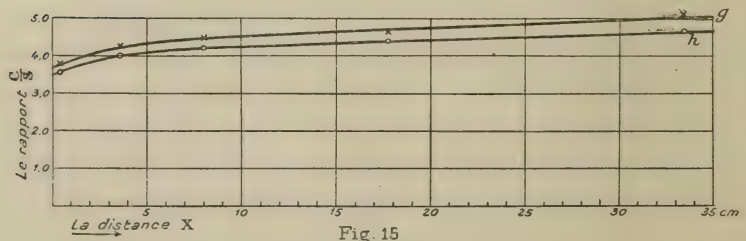


Fig. 15

La courbe g correspond à la division 40 de l'électromètre et h à la division 30. Comme on le constate, la différence est marquée dans toute échelle des x.

La courbe g donne les valeurs de $\frac{C}{S}$ pour chaque valeur de x, et ce sont ces valeurs qui sont introduites dans la formule (17) pour calculer le potentiel effectif. Ce potentiel est différent pour chaque série de mesures, les différences d'ailleurs ne sont pas grandes. Si on le connaît, on ramène chaque fois la force mesurée à celle qu'elle devait être si le potentiel était de 8000 volts; ce qui s'obtient facilement en la multipliant par $\left(\frac{8000}{V_e}\right)^2$, car les forces sont proportionnelles aux carrés des potentiels. Seules ces valeurs ramenées à 8000 volts sont comparables.

Les résultats obtenus sont fournis par le tableau III.

TABLEAU III.

Distance des centres.	x	Force F gr.		Écart
		observée.	calculée.	°/₀.
Centimètres.	Centimètres.			
20,0	0	0,0530	0,0535	— 0,9
24,0	4,0	0,0483	0,0477	+ 1,2
26,0	6,0	0,0436	0,0448	- 2,6
28,0	8,0	0,0422	0,0420	+ 0,4
30,0	10,0	0,0391	0,0392	— 0,2
34,0	14,0	0,0327	0,0339	— 3,5
38,0	18,0	0,0290	0,0293	— 1,0
44,0	24,0	0,0241	0,0237	+ 1,7
50,0	30,0	0,0196	0,0195	+ 0,5
60,0	40,0	0,0146	0,0145	+ 0,6

Chacune des données indiquées représente une moyenne de 4 à 6 séries séparées de mesures faites à diverses reprises.

J'indique en même temps la valeur théorique de la force pour chacune, ainsi que l'écart de la valeur expérimentale de la valeur théorique en pourcentage.

Ces valeurs sont portées sur la figure 16, où *b* représente la

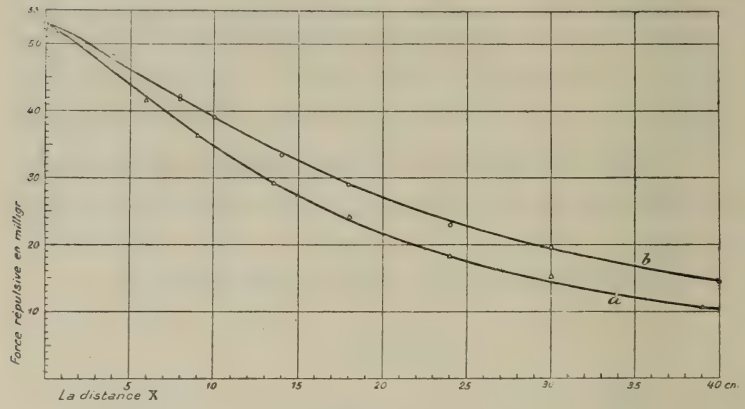


FIG. 16.

courbe théorique. Les points marqués par de petits cercles sont ceux obtenus par mesure. On le voit, la courbe expérimentale se confond complètement avec la courbe théorique. L'inspection du tableau III montre quel haut degré de précision et de concordance on a pu obtenir. On ne pouvait espérer une précision plus grande que 4 °/₀; or, le tableau III montre qu'on est allé beaucoup plus loin. A des distances plus grandes, je n'ai pu effectuer de mesure, car l'influence du plafond, quoique distant encore de 190 centimètres, troublait encore trop le champ. De plus, les corrections calculées n'étaient pas assez certaines.

2. *Deux sphères de même rayon* ($r_a = r_b = 7^{cm}5$). — Toutes les mesures ont été faites de la même façon que pour le cas précédent.

Voici tout d'abord le tableau (IV) indiquant les mesures obtenues dans la détermination du rapport $\frac{C}{S}$.

TABLEAU IV.

$x = 1^{cm}02$		$x = 4^{cm}08$		$x = 6^{cm}36$		$x = 14^{cm}62$		$x = 28^{cm}25$	
D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$	D_c	$\frac{C}{S}$
18,1	4,10	20,0	5,50	19,8	5,30	20,4	6,31	21,2	7,08
19,2	4,11	21,2	5,65	20,1	5,40	19,4	6,50	23,9	6,96
20,1	4,22	22,5	5,41	21,7	5,48	19,6	6,50	26,7	7,06
24,3	4,43	24,4	5,60	24,6	5,52	19,8	6,65	28,8	7,01
25,8	4,12	25,9	5,78	26,8	5,78	29,4	6,71	34,7	7,04
31,3	4,25	26,6	5,55	29,8	5,60	29,8	6,98	35,8	7,20
34,1	4,40	28,1	5,46	30,3	5,89	32,3	6,76	37,2	7,06
40,2	4,30	30,1	5,76	36,2	6,00	36,6	7,00	37,6	7,25
47,9	4,48	32,0	5,62	38,9	6,18	37,4	6,86	40,1	7,20
49,0	4,50	39,0	6,00	41,8	6,20	39,9	7,25	40,7	7,21
—	—	43,0	6,00	44,9	6,20	43,3	7,24	42,9	7,37
—	—	46,2	6,19	45,3	6,22	—	—	—	—
Courbe *a* fig. 17		Courbe *b* fig. 17		Courbe *c* fig. 18		Courbe *d* fig. 18		Courbe *e* fig. 17	

Les courbes des figures 17 et 18 ont été construites au moyen de ces données.

Elles montrent chacune la variation du rapport $\frac{C}{S}$ avec les différentes positions de l'aiguille pour une distance donnée entre les sphères.

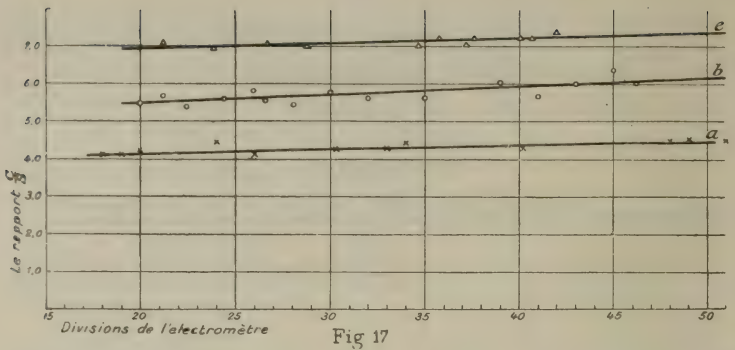


Fig 17

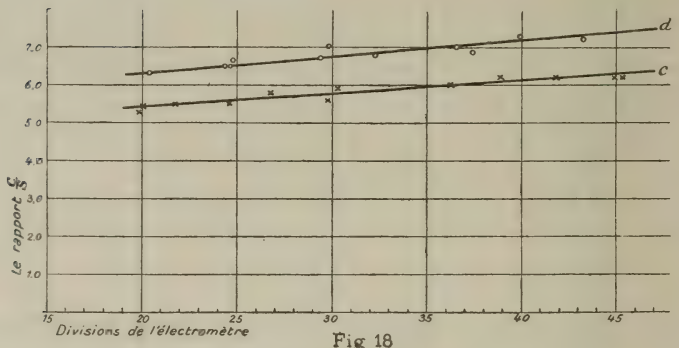


Fig 18

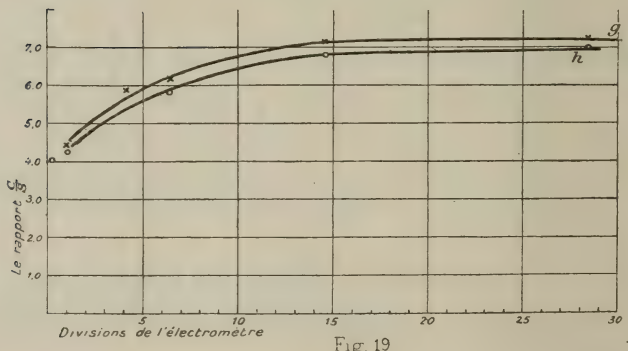


Fig. 19

Les valeurs de $\frac{C}{S}$ correspondant aux divisions 40 et 30 de l'électromètre, relevées sur les courbes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ont servi pour tracer les courbes des variations de $\frac{C}{S}$ avec la distance x entre les sphères et qui sont représentées par la figure 19. La courbe *g* correspond à la division 40, la courbe *h* à la division 30 de l'électromètre.

En se servant de la courbe *g* pour évaluer le potentiel effectif et en introduisant toutes les autres corrections mentionnées plus haut, les résultats des mesures des forces ramenées au potentiel de 8000 volts sont résumées par le tableau V.

TABLEAU V.

Distance des centres *c*.	x	Force F gr.		Écart
		observée.	calculée.	°/₀.
Centimètres.	Centimètres.			
15,0	0	0,0522	0,0535	— 2,4
15,75	0,75	0,0518	0,0521	— 0,6
18,0	3,0	0,0472	0,0479	— 1,5
19,5	4,5	0,0434	0,0448	— 2,0
21,0	6,0	0,0415	0,0420	— 1,2
24,0	9,0	0,0367	0,0365	+ 0,5
28,5	13,5	0,0290	0,0293	— 1,0
33,0	18,0	0,0243	0,0237	+ 0,8
39,0	24,0	0,0184	0,0184	0,0
45,0	30,0	0,0156	0,0160	+ 2,5
54,0	39,0	0,0105	0,0107	— 1,8

Ces valeurs sont portées sur la figure 16, et les points sont marqués par de petits triangles Δ qui se logent le long de la courbe *a* qui est la courbe théorique. Ici, donc, la courbe expérimentale se confond également avec la courbe théorique.

II. — *Action attractive.*

1. *Deux sphères de même rayon* ($r_a = r_b = 10$ centimètres). — Les données auxiliaires ont déjà été déterminées plus haut pour l'étude des actions répulsives. On s'est servi donc de la courbe g (fig. 15) pour rechercher la valeur du rapport $\frac{C}{S}$. Les autres données servant à calculer les corrections étaient déterminées pour chaque cas séparément.

Je rappelle que les deux sphères étaient chargées en même temps par contact avec les fils de charges reliés chacun à une batterie de condensateurs dont les armatures étaient maintenues à des potentiels + 8000 et 0 volts, — 8000 et 0 volts.

Toutes les corrections étant rapportées et les résultats ramenés à la force correspondant à 8000 volts, nous obtenons le tableau VI.

TABLEAU VI.

Distance des centres c.	x	Force F gr.		Écart
		observée.	calculée.	°/₀.
Centimètres.	Centimètres.			
22,0	2,0	1,5241	1,5823	— 3,6
23,0	3,0	1,0002	1,0038	— 0,3
25,0	5,0	0,5214	0,5315	— 1,7
28,0	8,0	0,2992	0,3078	— 2,7
30,0	10,0	0,2309	0,2302	+ 0,3
33,0	13,0	0,1610	0,1617	— 0,4
37,0	17,0	0,1117	0,1108	+ 0,8
40,0	20,0	0,0923	0,0917	+ 0,6
45,0	25,0	0,0640	0,0624	+ 2,5
50,0	30,0	0,0486	0,0471	+ 2,3

Ces valeurs sont portées sur la figure 20, où les points correspondants se logent le long de la courbe *a* qui est la courbe

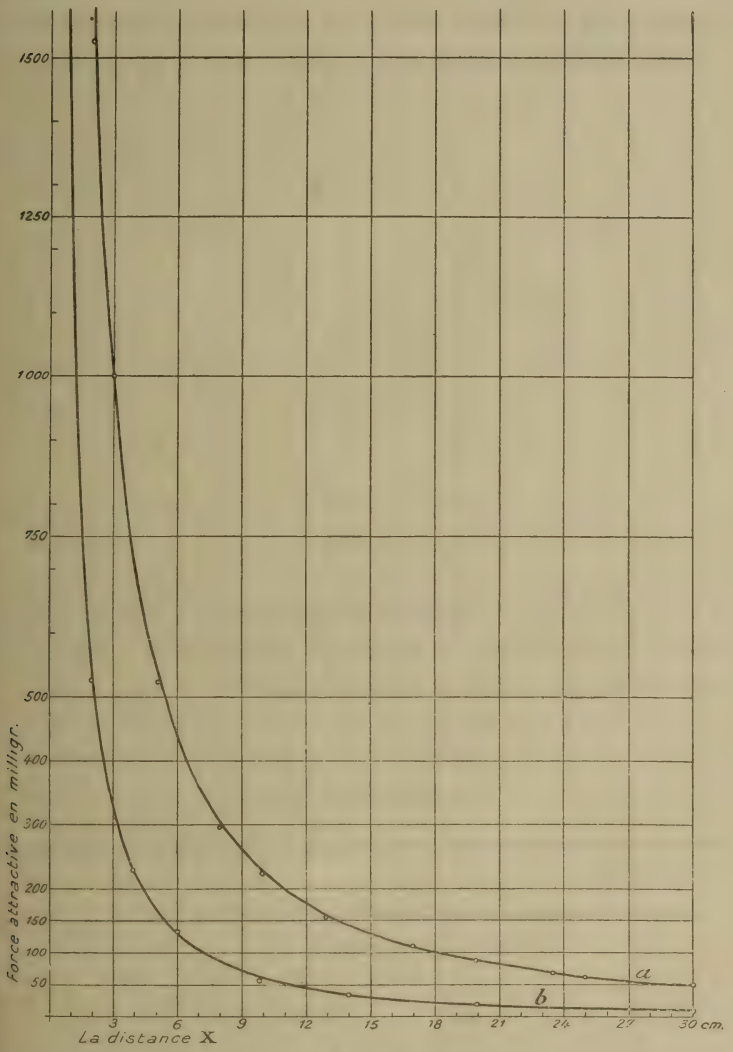


FIG. 20.

théorique. La courbe expérimentale se confond avec la courbe théorique. La concordance est tout à fait remarquable.

2. *Deux sphères de même rayon* ($r_a = r_b = 4$ centimètres). — La détermination du rapport $\frac{C}{S}$ a été faite comme plus haut; je crois inutile de donner toutes les mesures et je noterai seulement les valeurs du rapport $\frac{C}{S}$ correspondant à la division 40

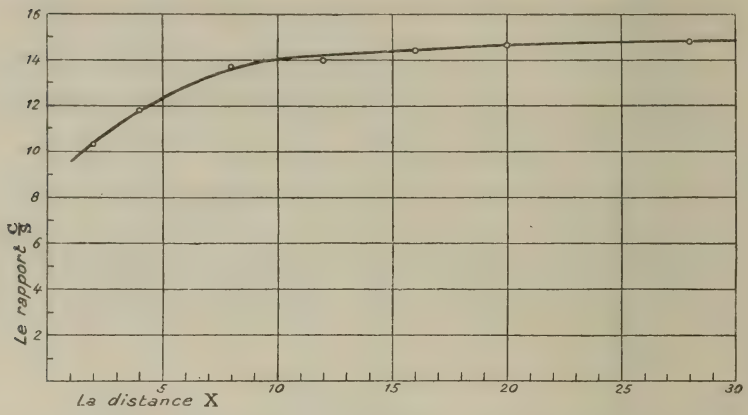


FIG. 21.

de l'électromètre et à différentes distances qui ont servi pour tracer la courbe de la figure 21, indiquant les valeurs du rapport $\frac{C}{S}$ pour toutes les distances x.

Ces valeurs sont données dans le tableau VII.

TABLEAU VII.

x centimètres.	2	4	8	16	20	28
$\frac{C}{S}$	10,3	11,8	13,7	14,0	14,4	14,8

Les résultats des mesures de forces, corrigées et ramenées aux valeurs correspondant aux potentiels + 8000 volts et — 8000 volts, sont résumées dans le tableau VIII.

TABLEAU VIII.

Distance des centres c.	x	Force F gr.		Écart
		observée.	calculée.	°/₀.
Centimètres.	Centimètres.			
10,0	2,0	0,5780	0,5565	+ 3,8
12,0	4,0	0,2302	0,2300	+ 0,08
14,0	6,0	0,1348	0,1324	+ 1,81
18,0	10,0	0,0607	0,0624	— 2,7
22,0	14,0	0 0358	0,0368	- 2,7
28,0	20,0	0,0206	0,0204	+ 0,9
38,0	30,0	0,0107	0,0101	—

Ces valeurs sont portées sur la figure 20, où les points correspondants se placent le long de la courbe b qui est la courbe théorique. La courbe expérimentale se confond également avec la courbe théorique. L'inspection du tableau VIII montre pourtant que la précision ici n'est plus aussi grande que dans les cas précédents, mais cela se comprend facilement. Les sphères étant maintenant de faible diamètre, toutes les perturbations sont beaucoup plus sensibles, et leur détermination exacte beaucoup plus difficile. L'accord est cependant encore remarquable.

Forces attractives et répulsives entre sphères de rayons différents.

Cette étude était encore beaucoup plus pénible, car aussi bien les perturbations initiales que la déperdition continue devaient être mesurées pour chacune des deux sphères; toutes les données auxiliaires, dont la détermination a été décrite plus haut, étaient ici en nombre double, et, par suite, l'étude d'une couple de sphères demandent un temps excessivement long.

Quoi qu'il en soit, ce travail étant fait, j'ai obtenu également la même concordance remarquable entre la mesure directe et les données théoriques que dans le cas de l'action des sphères de même rayon.

CONCLUSIONS.

Les résultats des mesures indiquées dans ce travail montrent que les valeurs absolues des forces pondéromotrices s'exerçant entre les charges réparties sur des conducteurs différents sont, dans les limites de précision de nos expériences, celles indiquées par les calculs théoriques basés sur l'application de la loi de Coulomb à toutes les charges présentes.

En même temps, une concordance remarquable entre les données théoriques et expérimentales montre l'exactitude de la méthode qui a été appliquée.

A la question posée dans l'introduction, l'expérience répond affirmativement, c'est-à-dire que la résultante de forces pondéromotrices est égale à celle que l'on obtient en appliquant la loi élémentaire à toutes les charges réparties sur deux conducteurs.

Quant à conclure de là que l'hypothèse même dont on est parti est également vraie, c'est-à-dire que les charges agissent effectivement suivant les lignes droites qui les joint à travers le milieu métallique, la question ne me paraît pas possible.

L'expérience nous donne toujours la valeur d'une certaine intégrale qui peut être obtenue de plusieurs autres fonctions.

Imaginons un conducteur isolé dans l'espace et chargé. Toutes les théories s'accordent à dire que la surface du conducteur est soumis à l'action d'une force dirigée vers l'extérieur. Mais, d'après la simple théorie de l'action à distance, où on suppose la loi de Coulomb applicable aux charges réparties sur un même conducteur, cette force provient de la répulsion de toutes les charges réparties sur le conducteur, et, d'après la théorie du champ, elle est due à la tension des lignes de forces, ou peut-être à leurs pressions transversales. C'est à essayer d'éclaircir cette question que je consacrerai le chapitre suivant.

CHAPITRE II.

Études sur la tension électrostatique.

Dans le premier mémoire écrit sur la théorie mathématique de l'électricité statique, et qui est dû à Poisson (*), ce savant a établi qu'en un point du conducteur chargé s'exerce, en vertu des forces agissant suivant la loi de Coulomb, une pression dirigée suivant la normale extérieure à la surface et dont la grandeur (**) est

$$F = 2\pi\sigma^2$$

en désignant par σ la densité électrique superficielle. C'est cette force F qu'on appelle *pression ou tension électrostatique*. La preuve expérimentale de l'existence de cette pression manquait alors, et c'est seulement en 1831 que l'abbé Fontana (***) observa l'augmentation de volume d'un condensateur pendant sa charge et a montré que le fait prévu par le savant géomètre existait effectivement.

Telle était, du moins, l'interprétation de Volta.

Mais cette observation fut oubliée et le fait fut redécouvert par Volpicelli (IV), qui, en plaçant la boule d'un thermoscope de Rumford, couvert de métal à sa surface, dans le champ électrique, vit l'index se déplacer vers la boule induite. Mais il

---

(*) Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*. (Mém. des savants étrangers, Paris, 1821.)

(**) On sous-entend dans tout ce qui suit que le diélectrique entourant le conducteur est l'air.

(***) *Lettere inedite di Alessandro Volto*, Pesaro, 1831, p. 30.

(IV) Volpicelli, *Sur l'induction électrostatique*. (Arch. de sc. exact. et nat., 1856, vol. XXXII.)

attribua le déplacement à une variation de température et non à l'action pondéromotrice du champ.

Dix ans plus tard, l'expérience de Govi (*) a de nouveau mis en évidence l'action en question.

Toutes ces observations, quoique montrant l'existence d'une action, n'ont rien donné ni sur sa nature ni sur sa grandeur. Les premières recherches méthodiques sont dues à Duter (**). Ce physicien a démontré que le volume de l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde augmente pendant la charge. Cette dilatation étant supposée produite par l'action de la tension électrostatique, le simple calcul montre que la variation de volume doit être directement proportionnelle au carré de la différence de potentiel entre deux armatures et inversement proportionnelle au carré de l'épaisseur de la lame isolante. Les recherches de Duter n'ont vérifié que partiellement la théorie. Il a trouvé que la variation du volume est directement proportionnelle au carré de la différence du potentiel, mais inversement proportionnelle à la 1re puissance de l'épaisseur de la lame isolante. Des résultats analogues ont été obtenus par Righi (***), qui a mesuré l'allongement d'un condensateur cylindrique.

Les recherches ultérieures de Quincke (IV) ont mis en doute les résultats de Duter et de Righi, car il semble en résulter que la variation de volume est inversement proportionnelle au carré de l'épaisseur de la couche isolante. Tout récemment, la question fut reprise par Wüllner et Wien (V), qui ont définitivement montré que la variation de volume des condensateurs est plus petite que ne l'exige la simple théorie de la tension électrostatique.

Mais au fond, ces expériences et même beaucoup d'autres sur cette question ne se rapportent pas au simple phénomène

---

(*) Govi, *Nuov. Cim.*, 1866, t. XXI, p. 18.

(**) Duter, *Sur la dilatation électrique des condensateurs pendant la charge.* (Compte rendu, 1879, t. LXXXVIII, p. 1260.)

(***) Righi, Compte rendu, 1879, p. 1262. (*Journ. d. Ph.*, XI.)

(IV) Quincke, *Wied. Ann.*, 10, p. 161, 1880.

(V) Wüllner und Wien, *Ann. d. Ph.*, p. 1217, 1902.

de la tension électrostatique, mais à un phénomène très complexe de déformation des diélectriques placés dans un champ électrique, question qui a été beaucoup étudiée théoriquement et expérimentalement, mais qui ne nous intéresse qu'indirectement.

Par contre, l'étude des forces et des déformations subies par un conducteur isolé, en vertu de son électrisation, a été abandonnée et n'a fait l'objet que d'un nombre très restreint de travaux exclusivement théoriques. La question présente cependant une grande importance au point de vue théorique.

Dans la suite, nous aurons à comparer les valeurs théoriques des forces à celles obtenues par l'expérience; rappelons donc brièvement les différentes méthodes dont on se sert pour établir l'expression de la tension électrostatique.

D'une manière générale, on peut distinguer trois sortes de méthodes :

Dans la première, on considère l'action mutuelle des charges suivant la loi de Coulomb; dans la seconde, ce sont les forces du champ extérieur produites par le conducteur qui agissent sur les charges réparties sur la surface de celui-ci ; dans la troisième, on ne fait aucune hypothèse sur la nature de la cause de l'action, mais on suppose le système obéissant aux lois de la thermodynamique. Certains auteurs emploient la combinaison de deux de ces méthodes.

C'est la première méthode qui se trouve exposée dans la plupart des traités. En supposant que deux charges placées en deux points quelconques de la surface du conducteur agissent suivant la loi de Coulomb, nous pouvons former l'intégrale exprimant l'action des charges, réparties sur toute la surface, sur la charge placée en un point déterminé de cette dernière. La valeur, ainsi obtenue, de la tension s'exerçant sur l'unité de surface, où la densité superficielle est σ, est

$$F = 2\pi\sigma^2.$$

Comme on le remarque, cette force est ici de nature répul-

sive. Cette méthode a subi des critiques aussi bien au point de vue physique qu'au point de vue mathématique. On sait, en effet, que la loi de Coulomb est applicable aux cas où, entre les deux corps chargés, il n'y a que l'éther. Or, dans le cas considéré ici, les charges se portant sur la surface extérieure du conducteur, l'espace séparant deux charges quelconques est occupé par le métal. On applique aussi la loi, qui n'est établie que pour les diélectriques, aux cas de corps conducteurs; ce qui est « une hypothèse assez singulière », d'après l'expression juste de Chwolson (*).

Jusqu'à maintenant, cette hypothèse n'a cependant pas été contredite par l'expérience. Au point de vue mathématique, la démonstration, sous la forme que lui a donnée, par exemple, Duhem (**), est absolument à l'abri de toute critique.

Dans la deuxième méthode indiquée par Maxwell (***), la surface du conducteur est envisagée comme étant plongée dans le champ, dont l'intensité sur la surface elle-même a une valeur déterminée. Les lignes de force du champ étant perpendiculaires à la surface équipotentielle du conducteur, exercent une tension vers l'extérieur. La valeur physique de la tension est ici opposée à celle indiquée par la première méthode. Au lieu d'une répulsion, on considère ici une traction vers l'extérieur. Puisque les lignes de force doivent se terminer nécessairement quelque part, le conducteur, dit « isolé », n'est que celui qui est fort éloigné de tous les autres, et cette tension est donc équivalente à l'attraction des conducteurs voisins chargés par influence.

Si, pourtant, nous supposons un conducteur placé, par exemple, dans les espaces interstellaires, cette attraction devrait disparaître; néanmoins le calcul montre que la force sera tou-

---

(*) O. Chwolson, *Traité de physique*, vol. IV, fasc. 1, p. 42.

(**) P. Duhem, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, 1891, vol. I, pp. 71-98.

(***) J. C. Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme*, vol. I, pp. 100, 163, 176.

jours la même. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

H. Pellat (*) a traité la question de la manière suivante : Il considère une couche électrique d'épaisseur finie. Puisque, à l'intérieur du conducteur, l'intensité du champ est nulle, et qu'immédiatement à l'extérieur elle acquiert une valeur finie, il est nécessaire d'admettre qu'elle varie dans l'épaisseur de la couche. La résultante de l'action de ce champ intérieur au conducteur est précisément la force de la tension électrostatique. L'expression de cette tension est

$$F = 2\pi\sigma^2.$$

Dans la troisième méthode, on fait parcourir au conducteur, ou à un système de conducteurs, une suite de modifications qui obéissent aux lois de la thermodynamique et, de là, on déduit l'existence et la grandeur de la tension. On doit à C.-A. Mebius (**) une démonstration élégante de l'expression de la tension d'après cette méthode.

Ce physicien fait subir au conducteur les modifications suivantes :

1° Une charge au potentiel V ; 2° un échauffement de $dt°$; 3° une décharge ; 4° un refroidissement à la température primitive. En appliquant la loi de la conservation de l'énergie, cet auteur montre la nécessité d'admettre l'existence d'une pression provenant de l'électrisation du conducteur, dont la valeur est

$$p = 2\pi\sigma^2.$$

C'est aussi en faisant subir à un condensateur plan deux transformations isothermiques et réversibles (1° charge et écartement des armatures ; 2° écartement des armatures et charge) que Pellat parvient à établir la valeur de la tension

---

(*) Pellat, *Cours d'électricité*, vol. I, p. 67.

(**) C. A. Mebius, *Wied. Ann.*, 61, pp. 638-640, 1897.

électrostatique, dont l'existence et la nature physique ont été expliquées comme je viens de l'indiquer.

Comme on le voit, les physiciens, en suivant des voies très différentes, arrivent à la même formule finale, qui, ainsi, paraît être inébranlable. Mais, en 1888, P. Duhem (*) a publié un mémoire remarquable où, par une analyse profonde, il parvint à établir une expression de la tension électrostatique différente de celle qui est généralement admise. Ne pouvant analyser ici cet important travail, résumons-en seulement les résultats. Le savant physicien, en suivant la voie de Helmholtz, introduit de nouvelles forces, non encore envisagées par d'autres physiciens, et, notamment, l'action de la matière du conducteur sur l'électricité qu'il contient. La force qu'exerce une particule matérielle de masse m sur une charge q distante de r peut s'exprimer, d'après Helmholtz (**), par

$$F = mqf(r).$$

La forme de la fonction $f(r)$ ne dépend que de la nature et de l'état de la masse m. Ces actions ne peuvent s'exercer qu'à des distances très faibles de r; dès qu'elles dépassent une certaine quantité μ, très petite, F devient égal à zéro. Duhem a démontré (***), en admettant que la loi de Coulomb soit applicable aux charges réparties sur un conducteur, que le potentiel thermodynamique interne d'un système a alors pour expression :

$$F = E(\Gamma - TS) + W + \Sigma\Theta Q,$$

en désignant par Γ l'énergie interne que posséderait le système si on ramenait à l'état neutre chacun des corps qui le constituent et en laissant à chacun d'eux sa densité et son état

---

(*) P. Duhem, *Ann. scientifiques de l'École normale supérieure,* vol. V, pp. 97-146.

(**) H. v. Helmholtz, *Ueber die Enhaltung der Kraft,* p. 47.

(***) P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique et ses applications,* 1886, pp. 191-209.

physique ou chimique invariables, en appelant S l'entropie que posséderait le système dans les mêmes conditions, W l'énergie électrique du système, et Θ une quantité qui dépend uniquement de la nature du système et qui est définie par

$$\Theta = \int F(r)dm.$$

L'intégration s'étendant à toutes les masses matérielles élémentaires comprises dans la sphère, dont le centre se trouve au point considéré à l'intérieur du conducteur et dont le rayon est μ, $F(r)$ étant définie par

$$\frac{dF(r)}{dr} = -f(r).$$

Le signe Σ désigne la sommation étendue à toutes les charges électriques du système. Si le système subit une modification isothermique virtuelle, on aura

$$\delta T = -\delta F + \delta T,$$

en désignant par δT le travail non compensé et par δT le travail des forces extérieures. Les conditions d'équilibre seront données par

$$\delta T = 0 \qquad \text{ou} \qquad \delta F = \delta T.$$

En supposant que la dite modification est une simple dilatation, l'auteur développe la dernière formule et aboutit, entre autres, à ce résultat remarquable que : « l'électrisation d'un fluide à pour effet d'exercer aux divers points de sa surface libre une traction ayant pour valeur

$$F = 2\pi\varepsilon\delta^2 - \frac{\partial\Theta}{\partial N}\delta - \frac{1}{M}\frac{\partial\Theta}{\partial v}Q, \qquad (27)$$

M étant le poids du conducteur, v le volume spécifique, Q la charge ».

Les deux derniers termes dépendent de Θ, donc de la nature du corps électrisé; le premier n'en dépend pas, c'est l'ancienne expression de la tension électrostatique.

La formule (27) est établie pour les conducteurs liquides, mais comme le remarque l'auteur lui-même : « il n'y a aucune raison pour que cette expression change dans le cas d'un conducteur solide ».

Dans cette théorie, comme dans celles de Pellat et d'autres, on admet l'existence de l'électricité dans une couche superficielle intérieure au conducteur. Nous n'avons pas d'indications exactes sur la distribution de charges dans la couche. On doit à M. Foeppl (*) un mémoire sur la théorie de cette distribution. Il part de l'hypothèse que le fluide électrique à l'intérieur du conducteur n'est pas seulement soumis à l'action des forces agissant suivant la loi de Coulomb, mais aussi à l'action des forces élastiques. Par le fait de l'augmentation de la densité cubique du fluide de ρ_0 à ρ', il se développe une pression élastique

$$p = c(\rho' - \rho_0),$$

c étant une constante.

En se basant sur cette hypothèse, on arrive à ce résultat que la densité ρ, en un point intérieur de la couche, distant de δ de la surface, est déterminée par la relation

$$\delta = \sqrt{\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}}\, lg_e \frac{\rho_a}{\rho},$$

où ρ_a est la densité sur la surface libre et ε_0 la densité du fluide à l'état neutre.

La théorie électronique des métaux, de laquelle il faut attendre plus de détails sur cette question, ne donne à l'heure actuelle aucune indication.

(*) Foeppl, *Wied. Ann.*, 29, p. 591, 1886.

Dans les diverses théories mécaniques proposées, on ne se préoccupait presque pas de la force de tension électrostatique qu'on croyait pouvoir ramener à la loi de Coulomb. P. De Heen, en développant ses considérations sur la nature physique du champ électrostatique, admet l'existence de lignes de force distinctes dans le champ sous la forme de tourbillons éthérés. Il le suppose en un état d'agitation continuelle, analogue au mouvement d'agitation des molécules gazeuses, et il attribue la force de tension électrostatique à leurs actions mutuelles. La surface du conducteur étant la surface de départ des tourbillons, tous les efforts auxquels elles sont soumises se transmettent jusqu'au conducteur et se traduisent par des forces mécaniques appliquées au conducteur. L'agitation des tourbillons étant de faible amplitude, les forces provenant de leurs actions mutuelles se réduisent sensiblement aux composantes perpendiculaires à son axe, et, par suite, la force mécanique à laquelle est soumis le conducteur se réduit presque exclusivement à la composante tangentielle à la surface.

Dans toutes les théories du champ électrique qui admettent l'existence réelle des lignes de forces, sous quelque forme que ce soit, on peut donner la même interprétation à la force de tension électrostatique sur un conducteur isolé. Cette force peut provenir soit d'une tension de lignes, soit de leurs actions mutuelles les unes sur les autres. C'est P. De Heen qui, le premier, a émis cette idée.

Ainsi, nous sommes en présence de quatre résultats théoriques différents :

1° D'après la théorie généralement admise, la tension électrostatique est une force s'exerçant normalement sur la surface du conducteur chargé et dont la grandeur est

$$F = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)^2;$$

(*) P. De Heen. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1909, pp. 1226-1242.

2° La théorie de Duhem, qui considère aussi la tension comme une force normale à la surface, mais ayant pour expression

$$F = 2\pi\sigma^2 - \frac{\partial\Theta}{\partial N}\sigma - \frac{1}{M}\frac{\partial\Theta}{\partial v}Q;$$

3° La théorie de Foeppl, qui introduit, sauf les forces agissant suivant la loi de Coulomb, des forces d'origine élastique;

4° La théorie de De Heen, qui attribue les phénomènes dus à la tension à l'action mutuelle des lignes de forces et non point à leur tension longitudinale.

L'expérience seule pourra établir lequel de ces résultats correspond à la réalité des choses.

Il est facile de s'assurer, par la dilatation qu'éprouvent les bulles de savon au moment de leur électrisation, de l'existence des forces de tension électrostatique. Mais c'est là un phénomène purement qualitatif et, sur ce point, toutes les théories sont d'accord. Les recherches quantitatives, elles, n'ont pas été faites jusque maintenant. Le conducteur électrisé étant soumis aux forces de tension subit certaines déformations, mais les forces étant très faibles, les déformations correspondantes ne se prêtent guère aux mesures. Il en résulte que la mesure des forces elles-mêmes s'imposait.

Principe de la méthode.

Considérons une surface conductrice fermée S ayant en chaque point des rayons de courbures finis. Supposons-la chargée d'une densité superficielle σ, son niveau potentiel ayant la valeur V. Limitons sur la surface S une partie S′ (fig. 22) au moyen d'une courbe continue fermée l. Imaginons, de plus, que le diélectrique environnant soit homogène et isotrope autour de S, et soit K sa constante diélectrique. Chaque élément dS' de la surface S′ est soumis à la force de tension électrostatique

$$dF = \frac{1}{8\pi K}\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)^2 dS'.$$

Désignons par lmn les cosinus directeurs de la normale et par $\alpha\,\beta\,\gamma$ ceux d'une droite u, sur laquelle nous projetons dF ; on aura alors

$$\text{proj. } dF = \frac{1}{8\pi K}\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)^2 (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 dS'$$

et la projection de la résultante de ces forces, s'exerçant sur la surface S', dans la direction u, est

$$\mathcal{F} = \text{proj. } F = \frac{1}{8\pi K}\int_{S'}\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)^2 (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 dS' ;$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments de la surface S. C'est la force $\mathcal{F}$ qui a été mesurée.

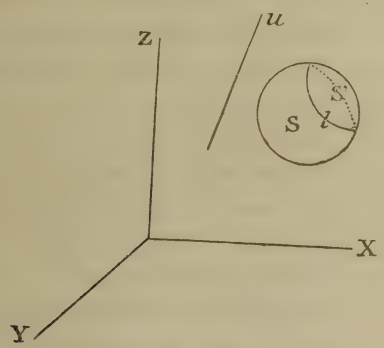


Fig. 22.

Dispositif expérimental.

L'ensemble des appareils servant pour ces mesures a été celui décrit dans le chapitre premier, mais avec de petites modifications suivant le genre de mesures.

Les surfaces employées ont été réalisées en tôle de laiton. Elles ont été découpées en deux ou plusieurs parties par des plans perpendiculaires à leurs axes de révolution. Les surfaces de juxtaposition devaient être très soigneusement travaillées pour permettre une juxtaposition parfaite des parties, sans tou-

tefois que l'adhérence puisse se manifester. Leurs dimensions ont été vérifiées à $0^{cm}01$ près.

Supposons le conducteur divisé, par exemple, en deux parties. L'une d'elles est maintenue fixe par une tige *a* en verre, d'un diamètre de $0^{cm}4$ et d'une hauteur de 150 centimètres, qui est encastrée en bas dans un croisillon *b* en bois muni de vis de rappel *f* également en bois, et qui est surmonté en haut par un cylindre de 10 à 15 centimètres de longueur et 1 à $1^{cm}5$ de diamètre en ozokérite, auquel est fixée, par l'ozokérite même, la partie inférieure du conducteur étudié. Pour donner plus de stabilité à la partie supérieure de la tige, elle était maintenue fixe par quatre fils *c* (en soie paraffinée), tendus par des vis. Le tout était posé sur un pied en bois non, représenté sur la figure.

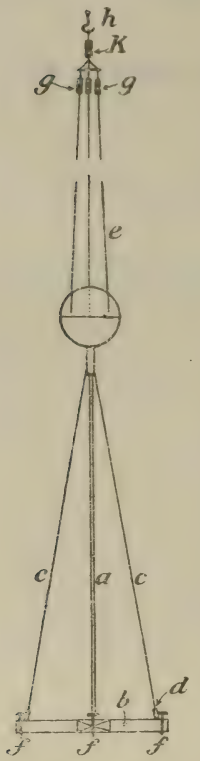


Fig. 23.

L'autre partie du conducteur avait été suspendue par trois fils *e* de soie paraffinée et munis de petites vis *g*, à un crochet *h*. Ce dernier était suspendu au plateau de la balance par l'intermédiaire d'un fil de soie muni d'une vis K. Les vis *g* et K, de $0^{cm}2$ de diamètre, servaient pour le réglage de la partie suspendue. Au moyen des vis *g*, on peut faire varier l'inclinaison de la partie suspendue par rapport à la partie fixe; la vis K donne le déplacement d'ensemble. La distance des vis *g* à la surface étudiée était en moyenne de 150 centimètres. La distance de la surface conductrice au support en bois et au parquet du laboratoire était respectivement de 150 centimètres et de 230 centimètres.

Le conducteur, étant ainsi éloigné de toutes les autres surfaces conductrices, peut être considéré pratiquement et avec toute sûreté comme « isolé dans l'espace ».

Les méthodes de charge, de mesure du potentiel et des forces

ont été les mêmes que dans le cas des actions des sphères. Quelques modifications d'ordre technique vont cependant être indiquées.

Évaluation du potentiel effectif.

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que cette détermination demande le plus de soin. L'emploi de l'électromètre de Kelvin ne donnait pas, dans le cas actuel, des résultats suffisamment exacts, surtout à cause de sa grande capacité en comparaison de celle des conducteurs étudiés. Il était nécessaire d'employer un électromètre de capacité plus faible et donnant une plus grande précision. Dans ce but, j'ai construit un appareil du type de l'électromètre d'Ebert. Dans une cage en verre, recouverte intérieurement de feuilles d'étain, sont placés verticalement deux disques en laiton entre lesquels on peut créer un champ électrique uniforme. Au milieu de ce champ est suspendu, sur un bifilaire, un ellipsoïde de révolution, construit en aluminium, qui est muni d'un miroir et d'un amortisseur d'oscillations. L'ellipsoïde et un des disques sont mis à la terre, tandis que l'autre disque est relié au conducteur dont le potentiel doit être déterminé. L'ellipsoïde étant réglé par un procédé optique de façon que son axe soit dirigé à 45° des lignes de force du champ, on établit le champ sous l'action duquel l'ellipsoïde tournera d'un certain angle autour de l'axe du bifilaire. Pour mesurer cet angle, on projette l'image du fil d'une lampe à incandescence sur le miroir, et le mouvement de ce dernier déplace le faisceau de lumière réfléchie tombant sur une échelle en verre mat, placée à une certaine distance (200 centimètres dans nos expériences). L'étalonnage se fait soit par comparaison avec les indications de l'électromètre de Kelvin, soit par la décharge d'une capacité connue à travers un galvanomètre balistique.

Au moyen de cet instrument, qui montrait une division par 8 volts pour un voltage voisin de 8000 volts, j'ai mesuré les corrections nécessaires à l'évaluation du potentiel effectif. Le procédé de mesure de $\frac{C}{S}$ de $\Delta_1 V$ $\Delta_2 V$..., ainsi que le calcul

correspondant étaient identiques à ceux décrits dans le chapitre précédent. Dans les mesures de $\frac{C}{S}$ qui fournit une donnée importante pour les mesures, j'ai tenu à m'assurer que les valeurs mesurées sont exactes en les comparant à celles données par le calcul théorique. Je donnerai plus loin ces chiffres. Disons ici que la concordance est très bonne.

Il nous reste à examiner les défauts possibles de la méthode et leur influence sur les résultats.

Influence du support.

On pouvait objecter que le conducteur étant au voisinage et même au contact du diélectrique du support, tout le champ est déformé, puisque les lignes de force sont plus concentrées vers le bas et que, par suite, la force mesurée ne correspond pas à celle qui aurait été obtenue dans le cas d'une sphère entourée d'un diélectrique homogène.

Pour m'assurer que cette influence n'est pas considérable et ne peut, par suite, changer les résultats, j'ai utilisé les résultats obtenus dans l'action des sphères à distance. Un couple de sphères, de rayon $r_a = r_b = 7^{cm}5$, étant suspendues à une distance connue, j'ai mesuré la force répulsive s'exerçant entre elles; j'ai obtenu ainsi

$$F = 0^{gr}0550.$$

Alors, sans rien changer dans la disposition des deux sphères, j'ai placé au-dessous de la sphère inférieure et en contact avec elle le support employé dans les mesures actuelles et décrit tantôt. Deux séries de mesures effectuées dans ces conditions ont donné

$$F_1 = 0{,}0545, \qquad F_2 = 0{,}0554,$$

soit en moyenne 0,0549, valeur identique à celle obtenue sans l'emploi du support.

Ainsi donc, il se trouve démontré que cette modification du champ, existant sûrement, ne produit pas un effet sensible sur les forces observées. De plus, au cours des expériences, en employant les tiges en ozokérite de diamètres variables, je n'ai constaté aucune influence appréciable.

Influence des fils de suspension.

L'action pondéromotrice sur le diélectrique des fils peut se calculer de la même façon que je l'ai fait dans le chapitre précédent. Les formules générales (3) peuvent s'appliquer ici.

Supposons, pour plus de simplicité, que les fils e soient perpendiculaires au plan de séparation des deux parties du conducteur.

De plus, supposons-les de forme cylindrique, de rayon ρ, de longueur l, et soit K leur constante diélectrique. Prenons le plan de séparation des deux parties pour le plan des xy, et une perpendiculaire passant par le centre de la section circulaire de conducteur, pour l'axe des z. Il nous suffira seulement de calculer F_z.

Vu la petitesse de ρ, on peut considérer F comme constant dans toute une section de fil, faite perpendiculairement à son axe, et alors la force totale s'exerçant sur un fil est donnée par

$$F_z^l = \pi\rho^2 \int_0^l F_z dz = \frac{3K}{4} \rho^2 V^2 R^2 \int_0^l \left[\frac{z}{r^6} - 2\frac{z}{r^8}(2z^2 - x^2 - y^2) \right] dz.$$

Intégrons séparément les deux parties

$$I_1 = \int_0^l \frac{z}{r^6} dz = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R^4} - \frac{1}{(l^2 + R^2)^2} \right),$$

$$I_2 = \int_0^l \frac{z(2z^2 - x^2 - y^2)dz}{r^8} = \int_0^l \frac{z(2z^2 - R^2)}{(z^2 + R^2)^4} dz,$$

en prenant dans l'intégration par partie

$$u = 2z^2 - R^2, \qquad dv = \frac{z\,dz}{(z^2 + R^2)^4},$$

on obtient

$$F_z^l = \frac{3K}{16}\rho^2 V R^2 \left[\frac{1}{R^4} + \frac{3l^2 - R^2}{(l^2 + R^2)^3}\right].$$

L'action totale sur trois fils de suspension est, par conséquent,

$$F_z^l = \frac{9}{16} K\rho^2 V^2 R^2 \left[\frac{1}{R^4} + \frac{3l^2 - R^2}{(l^2 + R^2)^3}\right].$$

Cette force, dirigée vers les points où le champ est le plus intense, à pour effet de diminuer la force répulsive des deux parties du conducteur.

Dans mes expériences

$$l = 150\text{ cm}, \qquad \rho = 0^{cm}0015;$$

en prenant, en outre, la constante diélectrique $K = 2$, on trouve, pour la sphère de rayon $r = 10$ centimètres, chargée au potentiel de 8000 volts,

$$F = 0^{gr}000029.$$

Cette perturbation est donc absolument négligeable.

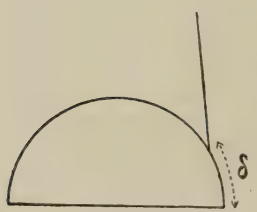


Fig. 24.

Le calcul suppose pourtant que le champ n'est influencé en rien par la présence des fils; je me suis assuré qu'il en était ainsi.

En supposant que cette perturbation soit sensible, elle serait nécessairement changée par le changement de position des fils de suspension. J'avais fait varier les points d'attache des fils sur la demi-sphère supérieure en les collant à des diverses distances curvilignes δ à partir de la ligne de séparation des deux parties, et pour chaque position j'avais fait une série de mesures. Les

résultats pour une sphère de rayon $r = 10$ centimètres, ont été les suivants :

$\delta = 4$ cm	9cm3	13cm7	13cm7,
F = 0,0795,	0,0795,	0,0792,	0,0790;

ces nombres démontrent que ces fils de suspension ne produisent pas de perturbations sensibles.

Si, de plus, nous tenons compte de ce que la méthode d'évaluation du potentiel effectif s'est montrée exacte dans les mesures de l'action des sphères à distance, et que la chute du potentiel le long de notre circuit est négligeable, on voit que les conditions expérimentales sont bien appropriées pour être comparables aux conditions théoriques.

Étude de l'action de demi-sphères.

Considérons une sphère de rayon R divisée en deux parties S_1 et S_2 par un plan P, la coupant suivant un petit cercle de rayon r. Supposons-la chargée au potentiel V_0 et calculons la force répulsive des deux parties.

Sur un élément ds_1 de la surface S_1 agit une force normale à ds_1 et dont la grandeur est

$$df = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)_0 ds_1.$$

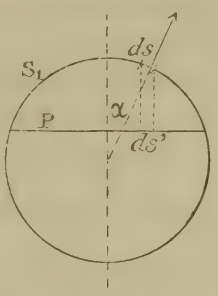


Fig. 25.

Cette force, projetée sur une droite perpendiculaire au plan P, donne

$$\text{proj. } df = dF = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)_0^2 \cos\alpha ds_1,$$

où, en remarquant que $ds_1 \cos\alpha$ est la projection de ds_1 sur le plan P, dont l'élément est ds', il vient

$$F = \frac{1}{8\pi}\int_{S'}\left(\frac{\partial V}{\partial R_0}\right) ds' = \frac{r^2}{8}\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)_0^2.$$

Mais

$$V = \frac{Q}{R} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial R_0}\right) = -\frac{V_0}{R},$$

par suite

$$F = \frac{V_0^2}{8}\frac{r^2}{R^2}.$$

Dans le cas particulier, où S_1 est une demi-sphère, on a

$$F = \frac{V_0^2}{8}, \tag{28}$$

c'est-à-dire que la force répulsive s'exerçant entre deux demi-sphères est indépendante du rayon de la sphère.

Pour vérifier la formule (28), j'ai employé une série de sphères en tôle de laiton. Les deux demi-sphères, étant superposées, formaient un seul conducteur sur lequel la ligne de séparation ne se marquait que par une raie très fine. Une moitié était fixée sur le support décrit plus haut et l'autre était suspendue au plateau de la balance.

Les valeurs des rapports $\frac{C}{S}$, obtenues pour différentes sphères, ont été les suivantes :

Rayon de la sphère =	$2^{cm}25$	$3^{cm}5$	$4^{cm}5$	$7^{cm}5$	$10^{cm}0$
$\frac{C}{S}$ =	12,0	7,57	5,88	3,45	1,99.

Si l'on calcule pour $\frac{C}{S}$ la valeur de C, en supposant S donnée par le rayon de la sphère, on devrait avoir pour C une valeur constante. Avec les chiffres ci-dessus, on obtient

$$C = 27,0 \qquad 26,5 \qquad 26,5 \qquad 25,9,$$

nombres qui sont bien concordants, étant donné que la supposition faite dans les calculs, notamment que la capacité du

système *électromètre plus sphère* est égale à la somme des capacités de ces deux corps pris séparément, n'est pas rigoureusement vraie.

Seule la valeur de C du rapport pour la sphère $r = 10$ centimètres s'en écarte plus. En se rapportant à la formule (17), déterminant le potentiel effectif, on voit que si le rapport $\frac{C}{S}$ est trouvé plus faible qu'il n'est en réalité, le potentiel V_e calculé sera plus petit que celui que la sphère possède réellement, car dans nos expériences on avait toujours

$$V_0 > V.$$

Il s'ensuit donc que le potentiel effectif calculé est V_e, tandis qu'il est réellement V'_e, et l'on a

$$V'_e > V_e.$$

En réduisant la mesure correspondante au potentiel de 8000 volts, on obtient pour F_1

$$F_1 = F\left(\frac{8000}{V_e}\right)^2,$$

tandis qu'on doit avoir pour F_2

$$F_2 = F\left(\frac{8000}{V'_e}\right)^2,$$

d'où

$$F_2 < F_1,$$

c'est-à-dire que l'erreur en question a pour effet d'augmenter la force. Il en résulte que nos valeurs trouvées ne peuvent être que trop grandes.

J'ai tenu à m'assurer par une autre voie encore que les résultats obtenus sont exacts, et en même temps à comparer les valeurs ci-dessus avec celles obtenues au moyen de l'électro-

mètre de Kelvin. Soit c_1 la capacité de ce dernier et c_2 celle de l'électromètre bifilaire employé dans ces dernières expériences. Chargeons l'électromètre de Kelvin à un potentiel v et, à un moment donné, relions-le par l'intermédiaire d'un fil de diamètre d et de longueur l, avec l'électromètre bifilaire; le potentiel v' commun aux deux électromètres sera donné par l'équation

$$vc_1 = v' \left[c_1 + c_2 + \frac{l}{2lg_e \frac{l}{r}} \right], \tag{29}$$

le terme $\frac{l}{2lg_e \frac{l}{r}}$ désignant la capacité du fil de jonction (*).

De (29), on obtient

$$c_2 = c_1 \frac{v - v'}{v'} - \frac{l}{2lg_e \frac{l}{r}}. \tag{30}$$

Mais on connaît la valeur de $\frac{c_1}{S}$ et, par suite, on peut avec (30) calculer c_2 si l'on mesure v et v'.

De cette façon, j'ai obtenu

$$c_2 = 26^{cm}3.$$

Une concordance aussi grande obtenue par voie aussi détournée prouve l'exactitude de la méthode de travail.

Passons maintenant aux résultats des mesures des forces. Pour chaque sphère, j'ai effectué plusieurs séries de mesures dont chacune se composait d'environ 30 mesures sûres, répétées à diverses reprises. Les résultats sont rassemblés dans le tableau IX.

(*) K. R. Johnson, *Öfv. Svensch. Vet. Akad. Förh.* 59, pp. 53-56, 1902, Beiblätt, 27, p. 67, 1903.

TABLEAU IX.

Rayon de la sphère.	Force en gr. pour V = 8,000 volts.								Ecart
	1	2	3	4	5	6	Moyenne.	Théorique.	°/o
c'm									
10,00	0,0791	0,0778	0,0795	0,0790	0,0792	0,0795	0,0790	0,0906	12,8
7,50	0,0771	0,0791	0,0766	0,0750	0,0770	0,0782	0,0771	0,0906	14,9
4,50	0,0721	0,0739	0,0752	0,0744	0,0732	0,0734	0,0747	0,0906	17,5
3,50	0,0726	0,0692	0,0717	0,0701	0,0691	0,0705	0,0705	0,0906	22,1
2,25	0,0624	0,0615	0,0620	0,0619	—	—	0,0619	0,0906	31,6

Les chiffres indiqués ont servi pour la construction de la courbe représentée par la figure 26; sur l'axe des abscisses

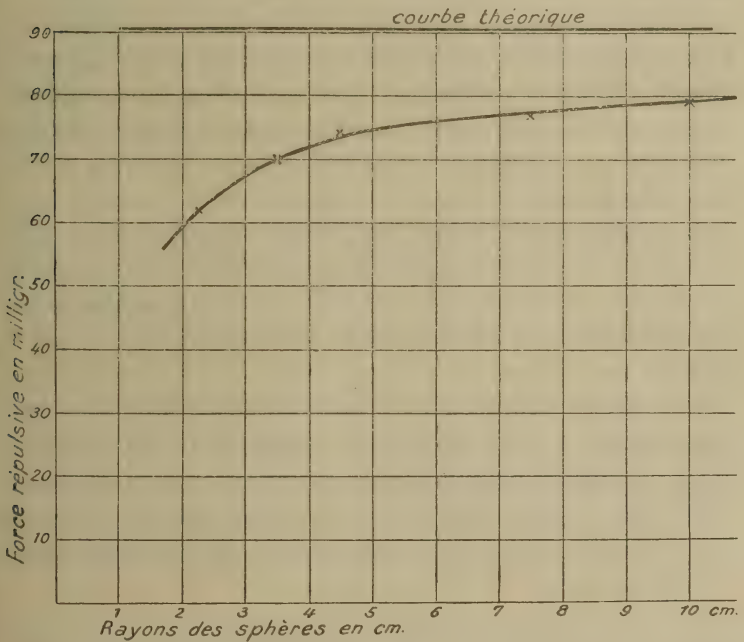


Fig. 26.

sont portés les rayons des sphères; sur l'axe des ordonnées, les forces. En même temps, on y verra tracée la courbe théorique.

L'inspection du tableau IX montre la très grande concordance des valeurs des différentes séries, si l'on tient compte des difficultés des mesures et de ce que tous ces chiffres ont été obtenus à diverses reprises et, dans beaucoup de cas, avec certaines modifications dans la technique des expériences.

Ainsi, par exemple, en ce qui concerne la sphère de rayon de 10 centimètres, les séries 1, 2, 3 ont été obtenues en juin et en octobre 1911, en employant pour l'évaluation du potentiel effectif l'électromètre de Kelvin avec trois procédés de charges différents. Les séries 4, 5, 6 sont fournies par les mesures du mois d'avril 1912, avec l'électromètre bifilaire et diverses modifications dans la tige de charge et le support de la partie inférieure. Des remarques analogues se rapportent aux autres cas, et cependant, malgré les variations multiples des détails expérimentaux, la force mesurée conservait sa valeur

A propos de la plus petite sphère de rayon $r = 2^{cm}25$, je dois faire une restriction, parce que la détermination du potentiel effectif a été ici très difficile et que les chiffres correspondants ne sont pas aussi certains que pour les autres sphères. En tout cas, il est peu probable que la force exacte soit plus grande que celle donnée ici.

La courbe représentative (fig. 26) montre que la force diminue avec le rayon de la sphère et que les différences constatées ne peuvent s'expliquer par des erreurs expérimentales ou par des conditions ne correspondant pas à celles exigées par la théorie.

La courbe expérimentale se rapproche de la courbe théorique à mesure que le rayon de la sphère augmente, et il se peut que la valeur indiquée par la théorie ne corresponde qu'au cas limite.

Si l'on compare ces données à celles que j'ai obtenues dans des recherches antérieures (*) sur la même question, on

---

(*) S. Pienkowski, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1910, pp. 435-511.

remarque que l'allure de la courbe est la même, mais que, cependant, les valeurs absolues diffèrent, car ces recherches ont eu pour but de tracer le tableau général et non pas des mesures précises.

Ces résultats expérimentaux nous montrent que la théorie classique de la tension électrostatique n'est pas suffisante pour expliquer les phénomènes.

Voyons si la théorie de Duhem rend suffisamment compte des faits. Plus haut, j'ai rappelé l'expression de la tension donnée par Duhem. En l'appliquant au cas d'une sphère, on obtient

$$F = \frac{V^2}{8} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Theta}{\partial N} VR - \frac{3}{4d}\frac{\partial\Theta}{\partial v} V,$$

où d est la densité de conducteur. On voit que, d'après cette théorie, le terme $\frac{V^2}{8}$ ne constitue qu'une partie de l'expression de la force totale; à cette partie s'ajoute une deuxième, dont la valeur est proportionnelle au rayon de la sphère et dépend, en outre, de la nature du conducteur; la troisième partie dépend de sa nature, mais non de la dimension de la sphère. De plus, la formule montre que la force F varie linéairement avec le rayon de la sphère, ce qui se rapproche beaucoup plus de la réalité que les résultats calculés d'après la théorie donnant $F = 2\pi\sigma^2$. Mais bien que plus parfaite, la théorie de Duhem est encore insuffisante pour rendre compte des phénomènes observés.

Voyons maintenant si la théorie de Foeppl n'explique pas mieux les faits. Cet auteur admet l'existence de pressions élastiques qui dépendent des coordonnées du point, et la pression s'exerçant sur un élément de surface est indépendante de l'orientation de celui-ci. Si, en un point à l'intérieur de la couche électrique, la densité d'électricité libre est ρ, la pression développée est, en désignant par c une constante,

$$p = c\rho.$$

Pour appliquer cette théorie à nos expériences, il faut donc

tenir compte de deux actions : celle des forces agissant suivant la loi de Coulomb et la pression élastique.

Calculons d'abord la première, en supposant que la distribution de l'électricité dans la couche soit donnée par la formule de Foeppl, citée plus haut. Dans ce calcul, je suivrai la méthode de Pellat.

La loi de Coulomb donne l'expression de la force agissante sur l'unité de charge placée en un point infiniment voisin de la surface électrisée

$$f = 4\pi\sigma.$$

Considérons une surface conductrice dont les rayons de courbure soient grands par rapport à l'épaisseur de la couche électrique. En un point de cette surface, menons le plan tangent que nous prenons pour le plan des xy ; l'axe des z positifs est dirigé vers l'intérieur de la surface. Soit, de plus, l l'épaisseur de la couche électrique. Dans le plan tangent, traçons une courbe fermée C, entourant une aire S très petite, et

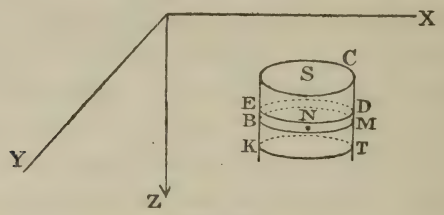


Fig. 27.

sur cette courbe élevons un cylindre droit. L'aire de la surface découpée par le cylindre sera, à des quantités d'ordre supérieur près, égale à S. Deux plans, $z = z_1$ et $z = z_1 - dz$ vont découper dans le cylindre une tranche B M D E. Alors l'unité de charge placée au point N, dans cette tranche, sera soumise à l'action d'une force

$$f = -4\pi\frac{q}{S},$$

où q est la charge du volume B K T M.

Or, d'après la formule de Foeppl, la densité ρ à la distance z de la surface est

$$\rho = e^{-\frac{z}{A}}\rho_a,$$

en posant, en abrégé,

$$A = \sqrt{\frac{c}{4\pi\rho_0}}$$

Par suite, la force f est

$$f = -\frac{4\pi}{S}\int_l^{z_1} S\rho_a e^{-\frac{z}{A}} dz = 4\pi\rho_a A\left(e^{-\frac{z_1}{A}} - e^{-\frac{l}{A}}\right),$$

et l'action, sur toute l'électricité de la tranche B M D E,

$$dF = 4\pi\rho_a^2 AS e^{-\frac{z}{A}}\left(e^{-\frac{z}{A}} - e^{\frac{l}{A}}\right) dz_1;$$

donc la force totale s'exerçant sur S est

$$F = 4\pi\rho_a^2 AS\int_l^0 \left(e^{-\frac{2z_1}{A}} - e^{-\frac{l+z_1}{A}}\right) dz_1 = -2\pi\rho_a^2 A^2 S\left(1 - e^{-\frac{l}{A}}\right).$$

En prenant $S = 1$, et développant en série,

$$F = -2\pi\rho_a^2 l^2\left(1 - \frac{l}{A} + \frac{7}{12}\frac{l^2}{A^2} - \frac{1}{4}\frac{l^3}{A^3} + \cdots\right),$$

ou, en ne conservant que les termes du second degré en l,

$$F = -2\pi\rho_0^2 l^2.$$

Exprimons F en fonction de la densité superficielle σ définie par

$$\sigma = \frac{dq}{ds},$$

la quantité d'électricité renfermée dans un cylindre droit de section ds est

$$dq = ds \int_0^l \rho_a e^{-\frac{z}{A}} d = z\rho_a A ds \left(1 \quad e^{-\frac{l}{A}}\right)$$

$$= \rho_a A ds \left(\frac{l}{A} - \frac{1}{2!} \quad \frac{l^2}{A^2} + \frac{1}{3!} \frac{l^3}{A^3} - \cdots\right),$$

d'où

$$\sigma = \rho_a A \left(\frac{l}{A} - \frac{1}{2!} \frac{l^2}{A^2}\right) = \rho_a \frac{l(2A - l)}{2A},$$

et

$$\rho_a = \frac{2A\sigma}{l(2A - l)}.$$

Introduisant cette valeur de ρ_a dans l'expression de F, on obtient

$$F = -2\pi\sigma^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2A}\right)^2}.$$

On voit qu'en négligeant dans cette expression $\frac{l}{2A}$ devant l'unité, on obtiendrait la valeur $2\pi\sigma^2$.

Évaluons maintenant la valeur de la pression élastique qui s'ajoute à F. La différence de pression entre deux points infiniment voisins dans la couche est

$$dp = \frac{c\rho_a}{A} e^{-\frac{z}{A}} dz,$$

et la pression sur la surface S,

$$p_1 = \int_l^0 \frac{c\rho_a}{A} e^{-\frac{z}{A}} dz = c\rho_a (e^{-\frac{l}{A}} - 1),$$

ou, en développant en série et négligeant les termes de degré supérieur à 2,

$$p = -\rho_a \frac{cl(2A - l)}{2A^2},$$

ou

$$p = -\sigma \frac{c}{A}.$$

L'action totale sera donc

$$F = -\left(2\pi\sigma^2 \frac{1}{\left(1 - l\sqrt{\frac{\pi\rho_0}{c}}\right)^2} + \sigma\sqrt{4\pi c\rho_0}\right).$$

Le signe *moins* indique que cette force est dirigée vers l'extérieur de la surface.

En appliquant cette formule au cas de la répulsion de deux demi-sphères chargées au potentiel V, on obtient

$$F = \frac{V^2}{8} \frac{1}{\left(1 - l\sqrt{\frac{\pi\rho_0}{c}}\right)^2} + VR \frac{\sqrt{\pi c\rho_0}}{2}.$$

Cette formule montre que la théorie de Foeppl prévoit des variations de F avec R, mais cette loi de variation est linéaire et, par suite, la théorie est insuffisante quoique dans le résultat général s'approchant plus de la réalité.

Si l'on envisage que la répulsion de deux demi-sphères est provoquée par les efforts entre les lignes de force, c'est-à-dire comme la force tangentielle à la surface du conducteur, les résultats ci-dessus se comprennent, sans que l'on puisse toutefois affirmer qu'il en est ainsi, car aucune loi numérique n'est donnée.

Il faut remarquer qu'au point de vue mécanique cette force

dirigée perpendiculairement à la direction des lignes de force, telle qu'elle est conçue par de Heen, n'a qu'une analogie éloignée avec les pressions transversales de Maxwell.

Étude de l'action sur les zones sphériques.

C'est cette étude qui semble militer plus en faveur de l'action tangentielle.

Le problème de la distribution de l'électricité sur une calotte sphérique conductrice et infiniment mince a été résolu, pour la première fois, par lord Kelvin (*), par l'application de sa méthode des images électriques. Ultérieurement, quelques mathématiciens ont donné des formes différentes à la démonstration, mais c'est la forme de lord Kelvin qui nous est la plus commode. La connaissance de cette distribution nous permet de calculer la projection sur une direction donnée de la résultante de l'action de la tension électrostatique sur une partie de la calotte, c'est-à-dire sur une zone sphérique.

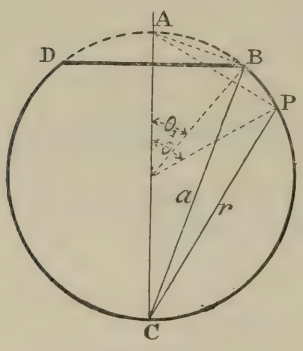


Fig. 28.

Soit une calotte sphérique conductrice infiniment mince D C B (fig. 28), détachée d'une sphère de rayon R. En désignant par r la distance CP et par a la distance CB, la densité électrique superficielle σ en un point P de la face extérieure de la calotte électrisée au potentiel V est donnée par

$$\sigma = \frac{V}{4\pi^2 R}\left[\left(\frac{4R^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \text{arc tang}\left(\frac{4R^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{V}{4\pi R}$$

(*) W. Thomson, *Reprint of papers on electr. and magn.*, p. 178.

et la densité σ' au point P, mais située sur la face intérieure,

$$\sigma' = \frac{V}{4\pi^2 R}\left[\left(\frac{4R^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{4R^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

En exprimant a et r en coordonnées sphériques, on a

$$a = 2R\cos\frac{\theta_1}{2} \qquad r = 2R\cos\frac{\theta}{2}$$

et ensuite

$$\sigma = \frac{V}{4\pi^2 R}\left[\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{V}{4\pi R}, \tag{31}$$

$$\sigma' = \frac{V}{4\pi^2 R}\left[\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{32}$$

Désignons par θ et φ l'azimut et la colatitude d'un point; l'aire élémentaire de la surface pourra s'exprimer par

$$ds = R^2 \sin\theta d\varphi d\theta,$$

et, si la densité superficielle est σ, la tension électrostatique s'exerçant sur l'élément ds est

$$df = 2\pi\sigma^2 R^2 \sin\theta d\varphi d\theta,$$

et sa projection sur l'axe des z

$$df_z = \pi R^2 \sigma^2 \sin 2\theta d\varphi d\theta.$$

Remarquons que la calotte porte la charge aussi sur sa face interne, et, par suite, sur un élément ds de cette dernière s'exerce aussi une tension normale à la surface, c'est-à-dire dirigée vers le centre de la sphère, et la valeur de sa projection sur l'axe des z est

$$df'_z = -\pi R^2 \sigma'^2 \sin 2\theta d\varphi d\theta,$$

et la somme de ces deux composantes sera

$$dF = \pi R^2(\sigma^2 - \sigma'^2) \sin 2\theta d\varphi d\theta$$

où, en substituant les valeurs de σ σ',

$$dF = \frac{V^2}{16\pi}\left\{1 + 2\left[\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}\sin 2\theta d\varphi d\theta.$$

La valeur de F pour une zone déterminée par les angles θ_1 et θ_2 est

$$F = \frac{V^2}{16\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{2\pi}\left\{1 + 2\left[\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}\sin 2\theta d\varphi d\theta$$

ou

$$F = \frac{V^2}{16\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{2\pi} \sin 2\theta\, d\varphi\, d\theta + \frac{V^2}{8\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin 2\theta\, d\varphi\, d\theta$$
$$- \frac{V^2}{8\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{2\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin 2\theta\, d\varphi\, d\theta. \qquad (33)$$

La première intégrale s'obtient immédiatement :

$$I_1 = \frac{V^2}{16\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{2\pi} \sin 2\theta\, d\varphi\, d\theta = \frac{V^2}{8}\sin(\theta_2+\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1). \qquad (34)$$

Appelons I_2 et I_3 respectivement la deuxième et la troisième intégrales de (33) ; nous avons alors

$$I_2 = \frac{V^2}{8\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin 2\theta\, d\varphi\, d\theta$$
$$= \frac{V^2 \sin\frac{\theta_1}{2}}{4}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin 2\theta\, d\theta}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

ce qui peut s'écrire :

$$I_2 = \frac{V^2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta_1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{(\cos\theta_1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour la limite inférieure, la fonction à intégrer devient infinie; il faut donc montrer que l'intégrale I_2 a un sens. Or, l'intégrale I_2 a un sens, si, étant donnée une quantité positive

arbitraire ε aussi petite que l'on veut, on peut lui faire correspondre une quantité positive η telle que l'on ait

$$\left| \int_{\theta_1 - h}^{\theta_1 - h_1} \frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos\theta_1 - \cos\theta}} \right| < \varepsilon \text{ pour } |h| \text{ et } |h_1| < \eta.$$

Dans le cas considéré ici, on a toujours

$$\theta \geq \theta, \quad \text{et} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

et, dans ces conditions, la quantité

$$\frac{\sin\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

ne change pas de signe ; par suite, en appliquant le théorème de la moyenne, on a

$$\int_{\theta_1 - h}^{\theta_1 - h_1} \frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \cos\theta' \int_{\theta_1 - h}^{\theta_1 - h_1} \frac{\sin\theta d\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}},$$

θ' étant compris entre $\theta_1 - h$ et $\theta_1 - h_1$.

L'intégration donne,

$$\int_{\theta_1 - h}^{\theta_1 - h_1} \frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} d\theta$$

$$= 2\cos\theta' \left[\left(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 - h_1)\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 - h)\right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Appelons ε' la plus grande des quantités,

$$\left(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 - h_1)\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 - h)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (35)$$

on peut donc écrire

$$\left| \int_{\theta_1 - h}^{\theta_1 - h_1} \frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \right| < 4 |\cos\theta'| \varepsilon' < \varepsilon, \qquad (36)$$

en prenant

$$\varepsilon > 4 \mid \cos\theta' \mid \varepsilon'.$$

Pour les formules (35), quand ε est donné, on peut toujours trouver une quantité η telle que l'inégalité (36) ait lieu. Ainsi se trouve vérifié le fait que l'intégrale I_2 a un sens.

Pour trouver sa valeur, intégrons par parties, en prenant

$$u = \cos\theta \qquad dv = \frac{\sin\theta d\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui donne

$$I_2 = V^2 \sin\frac{\theta_1}{2}\sqrt{2}\left\{\left[\cos\theta(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}\right]_{\theta_2}^{\theta_1} + \int_{\theta_1}^{\theta_2}(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta d\theta\right\}$$

et, ensuite, après les simplifications

$$I_2 = \frac{2}{3}V^2 \sin\frac{\theta_1}{2}\left(\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta_2 + 2\cos\theta_1). \quad (37)$$

Passons à l'intégration de I_3 :

$$I_3 = \frac{V^2}{8\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\operatorname{arctang}\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\sin 2\theta d\varphi d\theta$$

$$= \frac{V^2}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\theta_1}{2}}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

Posons

$$A = \sqrt{2} \sin \frac{\theta_1}{2}, \qquad B = \cos \theta_1$$

et intégrons par parties, en posant

$$u = \operatorname{arctang} \frac{A}{(B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \qquad dv = \sin\theta \cos\theta \, d\theta,$$

cela donne

$$I_3 = \frac{V^2}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \cos^2\theta \operatorname{arctang} \frac{A}{(B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{A}{4} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^2\theta \, d\theta}{(B + A^2 - \cos\theta)(B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \right\}. \tag{38}$$

Désignant la dernière intégrale de (38) par I'_3 et effectuant le changement de variable θ en ψ défini, par

$$\sin^2\psi = \frac{1}{B} \cos\theta, \tag{39}$$

on obtient

$$I'_3 = \frac{AB^{\frac{3}{2}}}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin^5\psi \, d\psi}{\left(\frac{B + A^2}{B} - \sin^2\psi\right)},$$

α et β étant exprimés par

$$\alpha = \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{\cos\theta_1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta = \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{\cos\theta_2}{B}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale I'_3 peut s'écrire

$$I'_3 = \frac{AB^{\frac{3}{2}}}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left[-\frac{3B + 2A^2}{2B} \sin\psi + \frac{1}{2}\cos^2\psi \sin\psi \right.$$

$$\left. + \frac{(B + A^2)^2}{B^2} \frac{\sin\psi}{\frac{A^2}{B} + \cos^2\psi} \right] d\psi$$

et en intégrant

$$I'_3 = \left[\frac{(3B + 2A^2)}{4} \cos\psi - \frac{AB^{\frac{3}{2}}}{12} \cos^3\psi \right.$$

$$\left. - \frac{(B + A^2)^2}{2} \operatorname{arctang}\left(\frac{B^{\frac{1}{2}}}{A} \cos\psi\right) \right]_{\alpha}^{\beta}. \qquad (40)$$

La formule (39) donne

$$\cos\psi = \left(\frac{B - \cos\theta}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui, étant introduit dans (40), fournit

$$I'_3 = \left[\frac{(3B + 2A^2)A}{4} (B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}} - \frac{A}{12} (B - \cos\theta)^{\frac{3}{2}} \right.$$

$$\left. - \frac{(B + A^2)^2}{2} \operatorname{arctang} \frac{(B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{A} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}.$$

Par suite, I_3 devient

$$I_3 = \frac{V^2}{2} \left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta \operatorname{arctang} \frac{A}{(B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(3B + 2A^2)A}{4} (B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. - \frac{A}{12} (B - \cos\theta)^{\frac{3}{2}} - \frac{(B + A^2)^2}{2} \operatorname{arctang} \frac{(B - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{A} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}.$$

Remplaçons A et B par leur valeur et introduisons les limites; après simplifications, il vient :

$$I_3 = \frac{V^2}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta_2 \operatorname{arctang}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\theta_1}{2}}{(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$
$$+\frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\frac{\theta_1}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^{\frac{1}{2}}(2\cos\theta_1+\cos\theta_2+6) \quad (41)$$
$$\left.-\frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\theta_1}{2}}+\frac{\pi}{4}\cos^2\theta_1\right].$$

En portant les valeurs (34) (37) et (41) dans la formule (33), nous obtenons :

$$F = \frac{V^2}{8}\left[\sin(\theta_2+\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1)\right.$$
$$+\frac{16}{3}\sin\frac{\theta_1}{2}\left(\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta_2+2\cos\theta_1)$$
$$+2\cos^2\theta_2\operatorname{arctang}\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (42)$$
$$-\frac{2}{3}\sin\frac{\theta_1}{2}\left(\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(2\cos\theta_1+\cos_2+6)$$
$$\left.+2\operatorname{arctang}\frac{\left(\sin\left(\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{\theta_1}{2}}-\pi\cos^2\theta_1\right].$$

Telle est la valeur théorique de la projection sur l'axe des z de la résultante de la tension électrique s'exerçant sur une zone sphérique déterminée par les angles θ_1 et θ_2, dont les plans des bases sont perpendiculaires à l'axe de z et électrisée à un

potentiel V. La formule (42) est applicable au cas d'une demi-sphère. Il suffit de poser

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2},$$

et l'on obtient

$$F = \frac{V^2}{8},$$

c'est-à-dire la valeur trouvée directement plus haut.

Appliquons la formule (42) à un cas particulier où le plan de la base inférieure de la zone passe par le centre de la sphère; alors $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (42), ce qui donne

$$F = \frac{V^2}{8}\left[(1-\pi)\cos^2\theta_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\theta_1}{2}\cos^{\frac{1}{2}}\theta_1(7\cos\theta_1 - 3) + 2\operatorname{arctang}\frac{\cos^{\frac{1}{2}}\theta_1}{\sqrt{2}\sin\frac{\theta_1}{2}}\right]. \tag{43}$$

Étude expérimentale.

Pour l'étude de l'action sur les zones, j'ai employé une sphère de rayon $r = 10$ centimètres, construite en aluminium et dont une moitié se composait de quatre zones de $2^{cm}5$ de hauteur chacune. Celles-ci étaient ajustées de façon que, superposées, elles formaient une demi-sphère entière. Ces quatre zones associées à une demi-sphère, faite d'une pièce, constituaient une sphère complète. Les surfaces de séparation avaient été particulièrement soignées afin que la superposition se fasse exactement. Il est à remarquer que les zones ont été découpées dans

deux demi-sphères fabriquées séparément dans le but de maintenir les dimensions exactes ; dans les zones découpées simplement dans une demi-sphère, il manquerait toujours, en hauteur, la largeur de la fente nécessaire pour sectionner.

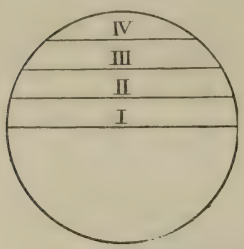


Fig. 29.

Pour évaluer le potentiel effectif, j'ai procédé de la même façon que dans les mesures précédentes.

En indiquant les zones, comme le montre le croquis ci-contre (fig. 29), j'ai obtenu pour les valeurs du rapport $\frac{C}{S}$, S désignant maintenant la capacité de la demi-sphère plus un certain nombre des zones, les chiffres suivants :

TABLEAU X.

Demi-sphère plus les zones.	I, II, III, IV.	I, II, III.	I, II.	I.
$\frac{C}{S}$	1,99	2,00	2,12	2,22

J'ai cru nécessaire d'avoir ici également la preuve que les valeurs ainsi obtenues correspondaient à la réalité.

Dans ce but, j'ai cherché la valeur théorique de la capacité d'une calotte sphérique, en partant de la formule de la distribution.

Les formules (31) et (32) donnent les densités sur les faces extérieure et intérieure de la calotte. La charge d'une aire élémentaire sur une calotte sphérique découpée dans la sphère de rayon R est

$$dQ = (\sigma + \sigma')ds = (\sigma + \sigma')R^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

et

$$Q = \int\int \left\{ \frac{2V}{4\pi^2 R} \left[\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{arctang} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{V}{4\pi R} \right\} R^2 \sin\theta d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{VR}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2}(1 + \cos\theta_1) + \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\theta}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} d\theta \right. \tag{44}$$

$$\left. - \int_{\theta_1}^{\pi} \operatorname{arctang} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta d\theta \right\}.$$

,

$$I_1 = \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\theta}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} d\theta = 2\sin\theta_1,$$

$$I_2 = \int_{\theta_1}^{\pi} \operatorname{arctang} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\pi} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\theta_1}{2}}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)} \sin\theta d\theta,$$

que l'on intègre par parties, en posant

$$u = \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\theta_1}{2}}{(\cos \theta_1 - \cos \theta)}, \qquad dv = \sin \theta d\theta,$$

et notant, pour plus de simplicité,

$$A = \sqrt{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \qquad B = \cos \theta_1$$

on a

$$I_2 = \left[-\cos \theta \operatorname{arctang} \frac{A}{\sqrt{B - \cos \theta}} \right]_{\theta_1}^{\pi} - \frac{A}{2} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(A^2 + B \cos \theta)\sqrt{B - \cos \theta}}.$$

La dernière intégrale se résout en posant

$$\cos \theta = B \sin^2 \psi,$$

et, après simplification, on obtient

$$I_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}(\cos \theta_1 - 1) + \sin \theta_1.$$

En introduisant les valeurs de I_1 et I_2 dans la formule (44), on a

$$Q = \frac{VR}{\pi}[\pi + \sin \theta_1 - \theta],$$

d'où il résulte que la capacité S est donnée par

$$S = \frac{R}{\pi}(\pi + \sin \theta_1 - \theta_1). \qquad (45)$$

La représentation graphique de (45) est fournie sur la

figure 30, où, en abscisses, sont portées les valeurs des angles θ_1 et en ordonnées, les capacités en centimètres données par (45).

En profitant du tableau X, j'ai calculé les valeurs de capacité des calottes, d'après les données expérimentales qui sont don-

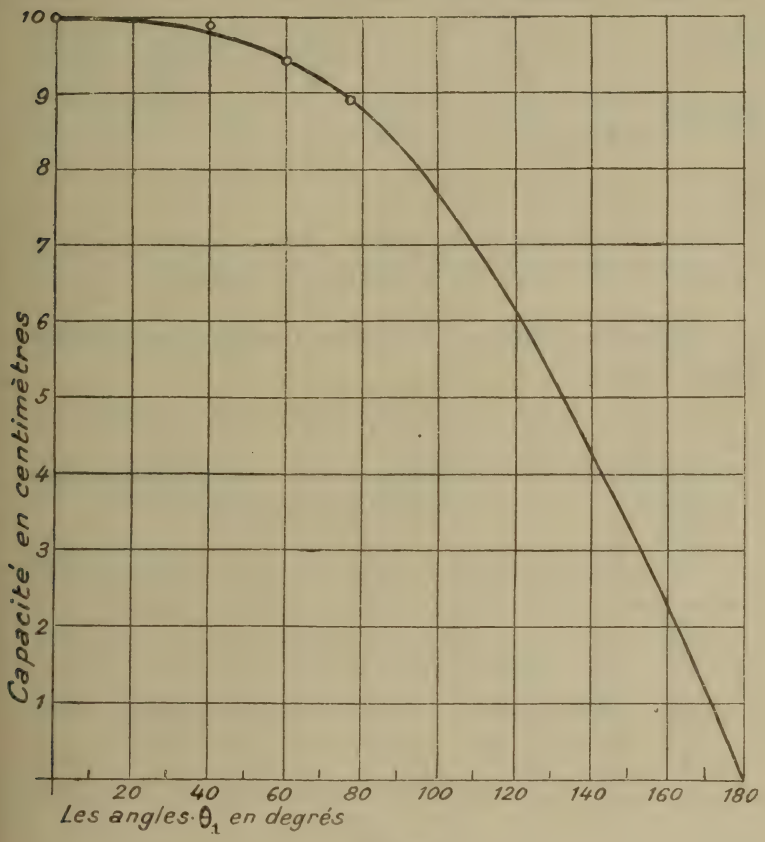


Fig. 30.

nées dans le tableau XI, et en même temps j'ai inscrit les capacités théoriques.

Ces valeurs sont portées aussi sur la figure 30, où les points correspondants (o) se placent sur la courbe théorique.

TABLEAU XI.

Système.	Demi-sphère plus les zones.			
	I, II, III, IV	I, II, III.	I, II.	I.
Angles θ_1	0	41°24'35"	60°0'0"	75°31'20"
Capacité théorique. . . .	10,0	9,805	9,424	8,883
Capacité expérimentale . .	10,0	9,9	9,4	8,9

Cette concordance remarquable prouve encore une fois l'exactitude de la méthode expérimentale employée.

Les résultats de mesure des forces répulsives sont résumés dans le tableau XII.

TABLEAU XII.

Système repoussé, zones.	Force répulsive en grammes.						
	1re sér.	2e sér.	3e sér.	4e sér.	5e sér.	6e sér.	Moyenne.
I, II, III, IV.	0,0791	0,0790	0,0778	0 0795	0,0792	0,0795	0,0790
I, II, III.	0,0832	0,0829	0,0822	0,0830	0,0821	0,0830	0 0830
I, II.	0,0910	0,0886	0,0888	0,0922	0,0879	0,0914	0,0900
I.	0,0909	0,0909	0,0917	0,0908	0,0936	—	0,0916

La figure 31 représente les courbes relatives à ce cas. La courbe A est la courbe théorique dont l'équation est donnée, par équation (43). La courbe B est celle qui est tracée d'après quelques points obtenus par l'expérience. Toutes les deux correspondent à un potentiel de 8000 volts de la calotte. La courbe

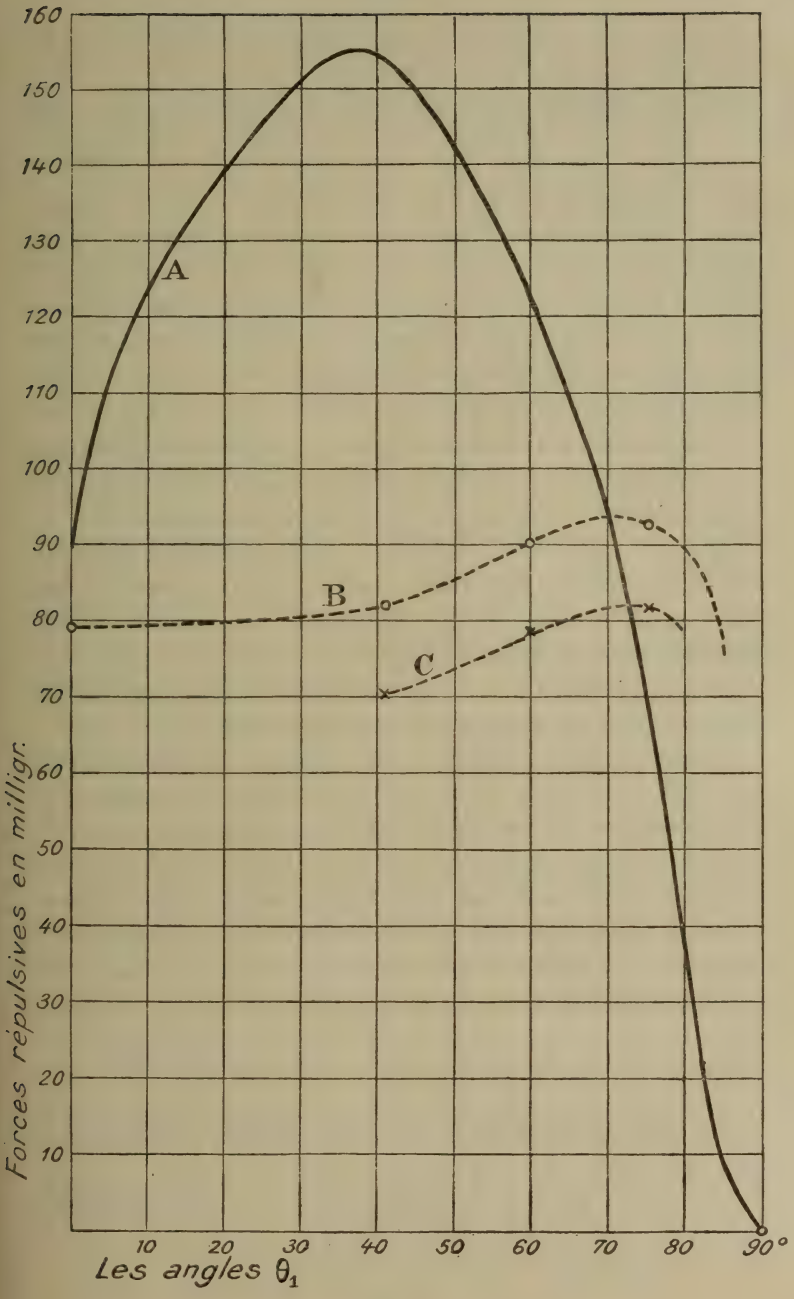

160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
A
B
C
Forces répulsives en milligr.
10
20
30
40
50
60
70
80
90°
Les angles θ1

Fig. 31.

expérimentale montre que la force varie peu lorsque la hauteur de la zone diminue. Il est difficile pourtant de préciser l'allure de la courbe expérimentale, mais il est certain que pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $F = 0$. Mais il ne serait possible de dire comment elle se comporte au delà de $\theta_1 = 75°31'20''$, ce qui correspond à la dernière zone employée dans nos expériences, qu'en faisant des mesures avec des zones encore plus étroites, mais cela est à peine réalisable, car les difficultés aussi bien d'exécution de telles zones que de mesures de la force sont alors considérables. Il est cependant probable qu'elle ait la forme que j'ai indiquée sur la figure.

L'écart entre les courbes théorique et expérimentale est trop considérable et la méthode de mesure trop soignée pour qu'on puisse attribuer ce désaccord aux erreurs expérimentales.

Mais il se peut, tout simplement, que la formule générale de tension ne soit pas applicable aux conducteurs ouverts et que, dans ce cas, il faille considérer directement les charges comme formant une couche de densité $\sigma + \sigma_1$ et $\sigma' + \sigma'_1$, dont les éléments obéissent à la loi de Coulomb. Voyons si cette hypothèse ne rend pas compte des résultats observés.

Soient $\varphi\theta$ et $\varphi'\theta'$ l'azimut et la colatitude des points situés respectivement sur la calotte fixe et sur la zone suspendue, cette dernière étant déterminée par les deux angles θ_1 et θ_2; soient, de plus, $\sigma\sigma_1$ et $\sigma'\sigma'_1$ les densités électriques superficielles sur les faces extérieure et intérieure de la calotte de la zone. Chaque élément de surface doit être considéré comme possédant la densité $\sigma + \sigma_1$. Les charges d'une aire élémentaire de la calotte et de la zone seront alors

$$R^2(\sigma + \sigma_1)\sin\theta d\varphi d\theta \qquad \text{et} \qquad R^2(\sigma' + \sigma'_1)\sin\theta' d\varphi' d\theta'.$$

La composante suivant l'axe des z de leur action mutuelle est

$$df = \frac{R^2(\sigma + \sigma_1)(\sigma' + \sigma'_1)\sin\theta\sin\theta'(\cos\theta' - \cos\theta)d\varphi d\varphi' d\theta d\theta'}{2\sqrt{2}[1 - \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)]^{\frac{3}{2}}},$$

et la composante de la résultante

$$f=\frac{R^2}{2\sqrt{2}}\int_{\theta_1}^{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{(\sigma'+\sigma_1')(\sigma+\sigma_1)\sin\theta\sin\theta'(\cos\theta'-\cos\theta)d\varphi d\varphi' d\theta d\theta'}{[1-\cos\theta'\cos\theta-\sin\theta'\sin\theta\cos(\varphi'-\varphi)]^{\frac{3}{2}}}. \quad (46)$$

En remplaçant les σ par leurs expressions données par Kelvin, on obtient une valeur indépendante du rayon de la sphère et une fonction des limites de l'intégration θ_1 et θ_2. Il est inutile de développer de longs calculs, car le simple raisonnement montre que f de (46) donne des valeurs s'écartant plus encore que F de (43) des données expérimentales. En effet, pour $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ nous obtenons évidemment la valeur $\frac{V_2}{8}$.
le point initial de (46) coïncide avec le point initial de (43). Il en est de même pour le point final quand $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Mais, pour toutes les valeurs intermédiaires, les charges de la face intérieure donnent les termes négatifs pour (43) et positifs pour (46). Il s'ensuit que toutes les valeurs de (46) seront plus grandes que celles de (43).

Dans les théories modernes, où l'on considère que le champ est constitué par des tubes de force, la notion du conducteur absolument isolé n'est plus admise, car les tubes de force partant du conducteur doivent nécessairement se terminer sur une autre surface électrisée, plus ou moins éloignée. Si la distance entre les éléments correspondants des tubes partant d'un conducteur est très grande, celui-ci est dit isolé. En se plaçant à ce point de vue, les tubes de forces partant de notre zone trouvent des éléments correspondants sur les objets voisins, et la force mesurée n'est que l'attraction de ces derniers. Mais, suivant cette idée, la force doit être sensiblement proportionnelle au carré de la charge, ce qui n'est pas le cas. D'ailleurs les mesures de la force répulsive entre les cylindres que j'ai obtenues montrent que cette hypothèse n'est pas applicable à nos expériences.

Zones couvertes.

Imaginons maintenant que l'on couvre la base supérieure de la zone par une surface plane conductrice; le conducteur sera alors fermé et possédera une surface plane chargée où la force s'y exerçant sera mesurable totalement, et il semblerait donc que la force répulsive doive ainsi augmenter. Or, l'expérience montre le contraire. En mesurant les forces correspondantes à ce cas, j'ai obtenu les valeurs suivantes :

TABLEAU XIII.

Partie repoussée.		Force répulsive en grammes.						
		1re sér.	2e sér.	3e sér.	4e sér.	5e sér.	6e sér.	Moyenne.
I, II, III	ouv.	0,0832	0,0829	0,0822	0,0830	0,0821	0,0830	0,0830
	couv.	0,0705	0,0713	0,0709	0,0709	—	—	0 0709
I, II. .	ouv.	0,0910	0.0886	0,0888	0,0922	0,0879	0,0914	0,0900
	couv.	0,0845	0,0818	0,0827	0,0832	0 0830	—	0,0830
I . . .	ouv.	0,0909	0,0909	0,0917	0,0908	0,0936	—	0,0916
	couv.	0,0823	0,0855	0,0809	0,0814	0,0809	—	0,0822

Les valeurs obtenues avec les zones couvertes sont toutes inférieures à celles fournies par les zones ouvertes (*). Les points représentatifs correspondants sont portés sur la courbe C, figure 31.

Tous ces faits, incompatibles avec la théorie, donnant pour la tension électrostatique l'expression $2\pi\sigma^2$, peuvent se conce-

(*) Il est sous-entendu que toutes les corrections ont été déterminées ici séparément, n'empruntant rien des données précédentes.

voir aisément en admettant l'hypothèse de l'action tangentielle. D'après cette hypothèse, la force s'exerce perpendiculairement et le long du plan passant par la courbe de séparation des deux parties. Et lorsque la hauteur de la zone diminue, la base restant la même, la résultante devrait rester aussi la même si des faits nouveaux ne s'y ajoutent pas. Mais à mesure de la diminution de la zone, il peut se former à l'intérieur un champ d'intensité d'abord très faible. Par conséquent, au commencement, la force doit à peine légèrement augmenter. Ce champ intérieur croît de plus en plus, à mesure que l'angle θ_1 augmente et, ainsi, à la force agissante sur la face extérieure s'ajoute celle agissant sur la face extérieure, d'où augmentation de la force. C'est effectivement ce que montre la courbe expérimentale. En couvrant les zones, on détruit le champ intérieur et, par suite, la force diminue, mais elle ne retombe pas sur la valeur correspondant à la répulsion de demi-sphères, car la configuration du champ est différente.

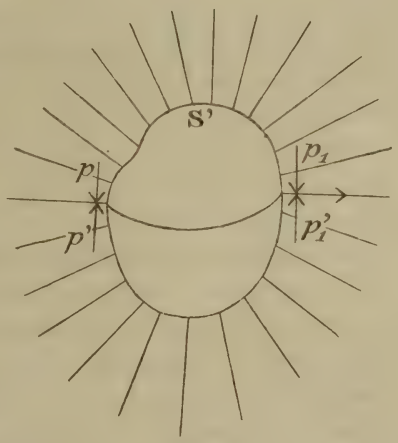


Fig. 32.

On peut se rendre compte de l'existence de ces forces tangentielles, non seulement en imaginant des mouvements de lignes de force, ainsi que le fait P. De Heen, mais encore en se basant sur la considération de tubes de force ou de tension, tels que ceux conçus par Faraday et la plupart des physiciens modernes. Les tubes de tension se terminent à la surface du conducteur sur laquelle ils possèdent une mobilité parfaite. A l'état d'équilibre, la direction de la tension le long des tubes à la surface du conducteur doit être, par conséquent, perpendiculaire à cette dernière. Mais à côté de cette tension longi-

tudinale, il existe des pressions transversales qui, à l'état statique des charges, s'équilibrent mutuellement.

Imaginons qu'une partie S′ de la surface conductrice, où se terminent un certain nombre de tubes de tension, puisse se détacher. Les pressions telles que $p\ p_1$ seront alors équilibrées par les actions antagonistes des autres tubes de tension distribués sur la partie restante du conducteur. Mais les pressions telles que $p'\ p'_1$, si elles ne sont pas égales et de sens opposé, vont donner une résultante qui tendra à entraîner la partie S′ dans sa direction. Ne perdons pourtant pas de vue que ce n'est qu'une image.

Étude des cylindres.

J'ai déjà mentionné qu'on pourrait peut-être chercher l'explication de nos résultats dans l'attraction des charges induites sur le plafond, car les tubes de force partant de conducteur étudié doivent nécessairement aboutir quelque part. Si on remarque que la distance du conducteur au plafond était de 230 centimètres, on rejettera cette objection. Néanmoins, j'ai cherché à résoudre la question expérimentalement de la façon suivante : Imaginons un cylindre conducteur sectionné par des plans perpendiculaires à l'axe en plusieurs parties à des différentes distances x de l'extrémité du cylindre. Les dites parties étant superposées forment un cylindre que l'on chargera; de chaque section émanent un certain nombre de tubes de force dont les autres extrémités se fixeront au plafond. Si c'est la tension de ces tubes qui se manifeste dans nos mesures, la force répulsive de deux parties du cylindre va varier sensiblement avec la longueur de la partie repoussée, car le nombre de tubes de force entrant en jeu est variable. Au contraire, si ce sont les pressions transversales qui interviennent, la force doit rester sensiblement constante, quelle que soit la partie du cylindre repoussée, à part de petits écarts causés par la non-uniformité de la distribution le long d'un cylindre de longueur finie.

Dans nos expériences, le cylindre était formé d'une suite

d'anneaux en laiton de même diamètre, qui, par juxtaposition, ont formé un cylindre de longueur constante qui pouvait être divisé en deux parties à des distances x différentes. Les anneaux étant superposés, les lignes de séparation étaient à peine visibles. Une partie du cylindre était maintenue fixe au moyen d'un support en paraffine; l'autre, suspendue au plateau de la balance, permettait de mesurer la force répulsive. J'ai expéri-

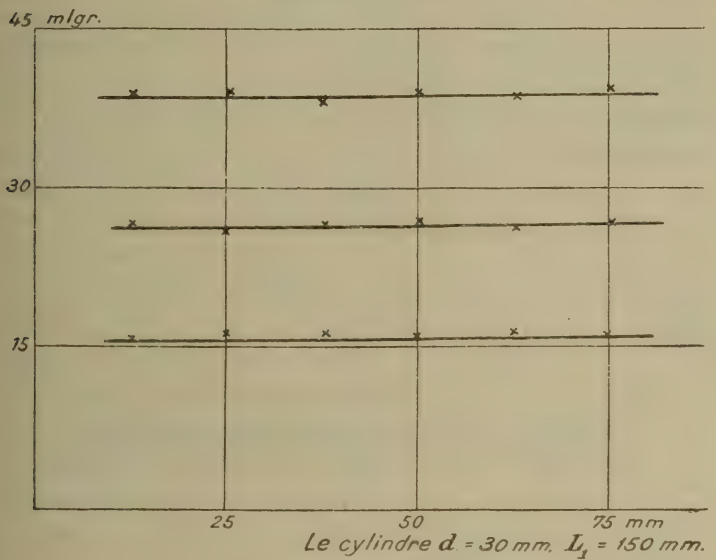


Fig. 33.

menté avec deux cylindres dont le diamètre $d_1 = 150$ millimètres et $d_2 = 60$ millimètres et de $L_1 = 150$ millimètres et $L_2 = 270$ millimètres de longueur. Les résultats des mesures sont représentés par la figure 33. Sur l'axe des abscisses sont portées les distances x de la section considérée à l'extrémité du cylindre; sur l'axe des ordonnées, les forces observées. Chaque courbe représente donc la variation de la force répulsive en fonction de la distance x à un potentiel donné.

Je ne donne pas les chiffres, car ils n'ont qu'une valeur relative.

Pour le plus grand cylindre, j'ai obtenu un résultat absolument analogue. Les courbes montrent que la variation de la force est à peine sensible.

La réponse à la question posée plus haut est bien nette : ce ne sont pas les tensions longitudinales des lignes de force qui se manifestent dans les actions observées.

Disques circulaires.

On peut se rendre compte de toutes les expériences résumées ci-dessus, sans toutefois les expliquer quantitativement, en admettant que les forces actives sont ici les pressions transversales. Mais, alors, si l'on considère un disque isolé dont une partie pourrait se détacher, on ne doit constater aucune force, semblerait-il. Or, l'expérience démontre le contraire.

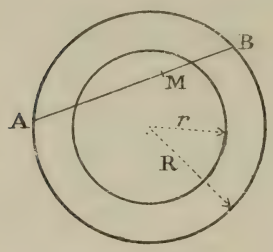


Fig. 34.

Recherchons d'abord la résultante de l'action de la tension électrostatique s'exerçant sur un disque circulaire de rayon r découpé dans un autre, concentrique et de rayon R plus grand. La densité, en un point d'un disque infiniment mince, chargé au potentiel V, est donnée par (*)

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{AM.MB}},$$

AB étant une corde quelconque passant par le point M. En appelant ρ et θ les coordonnées polaires d'un point du disque, la force de tension s'exerçant sur une aire élémentaire est

$$df = \frac{V^2}{2\pi^3} \frac{\rho d\rho d\theta}{R^2 - \rho^2},$$

(*) C. Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. I, p. 332.

et l'action totale sur le disque central

$$f = \frac{V^2}{2\pi^3}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\rho d\vartheta}{R^2-\rho^2} = -\frac{V^2}{2\pi^2}\log\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (47)$$

Cette formule montre que la force dépend seulement du rapport des rayons r et R et non de leurs valeurs absolues, c'est-à-dire que, dans de systèmes semblables, la force est indépendante des dimensions linéaires du système.

Le cas théorique est irréalisable : on ne peut expérimenter qu'avec des disques d'épaisseur finie qui, toutefois, peut être très faible par rapport au rayon du disque. Pour pouvoir mesurer la force, il est nécessaire d'employer un dispositif tel qu'une des faces seulement du disque étudié porte une charge. Pour se rendre compte de la valeur de la force, j'ai employé le dispositif suivant :

Dans un disque circulaire AB (fig. 35), on a pratiqué une ouverture conique *ab*, où l'on a placé une pièce D, ayant la

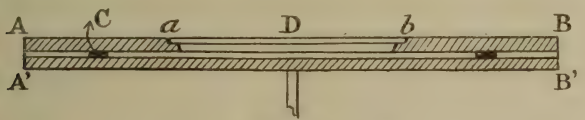


Fig. 35.

forme de deux troncs de cône superposés et dont la partie plus large, ayant seulement une hauteur de $0^{mm}2$, s'appuyait contre les parois de l'ouverture. Cette pièce D étant mise en place, les deux surfaces du disque AB et du disque D formaient un seul plan, sur lequel la circonférence de séparation était à peine visible et semblait une raie très fine. Le disque AB a été superposé sur un autre A'B' par l'intermédiaire de petites cales métalliques C de $0^{mm}1$ d'épaisseur. La surface latérale a été fermée par une bande métallique. Ainsi le système total ne formait qu'un seul conducteur de la forme d'un disque de 2 millimètres d'épaisseur, dont une partie D, portant la charge d'un côté

seulement, pouvait se détacher. Le disque central D a été suspendu au plateau de la balance et la partie restante a été maintenue fixe par la tige en paraffine.

Les mesures sont très difficiles à effectuer ici, et même en s'entourant de toutes les précautions possibles, on ne peut pas obtenir de résultats convenables. Mais j'ai pu me rendre compte que la force mesurée s'approchait assez bien de sa valeur théorique si l'on tient compte de ce que les conditions expérimentales ont été assez éloignées des conditions exigées par la théorie. J'ai pu même vérifier la propriété remarquable indiquée par la formule (47) et voir que, dans les systèmes semblables, la force est la même. Tout cela évidemment n'a pu être fait que grossièrement.

P. De Heen explique (*) ce cas par l'inclinaison des lignes de force sur le plan du disque : ce qui a lieu évidemment. A cause de cette inclinaison, il y a une composante dirigée perpendiculairement au plan du disque, mais son origine est toujours l'action perpendiculaire aux lignes de force. L'idée de l'agitation des lignes, c'est-à-dire des tourbillons, soutenue par P. De Heen, présente des difficultés. Au fond, dans ce cas, le champ n'est plus électrostatique, il y a un champ électromagnétique variable, car, en chaque point de l'espace, la force électrique varie constamment; les lois d'un tel champ seront toutes différentes de celles du champ électrostatique. Ce champ doit de plus rayonner de l'énergie. P. De Heen admet toutefois que cette perte d'énergie est extrêmement petite.

CONCLUSIONS.

Les désaccords observés entre la théorie et l'expérience ne peuvent pas être attribués à des défauts de la méthode expérimentale, puisque celle-ci a fourni de multiples preuves d'exac-

---

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1910, p. 431.

titude dans les études de l'action à distance, où la concordance entre la théorie et l'expérience est tout à fait remarquable.

Par conséquent, nous devons forcément conclure que la théorie classique de la tension électrostatique est insuffisante.

Si nous analysons la nature physique des forces auxquelles peut être soumis un élément de surface d'un conducteur électrisé, on peut formuler trois hypothèses :

1° La charge de l'élément considéré est repoussée par toutes les autres, réparties sur la surface, qui agissent suivant la loi de Coulomb, comme si elles étaient isolées. C'est le point considéré dans la théorie de l'action à distance.

Autrement la question sera résolue par les théories du champ. La charge de l'élément considéré étant susceptible de produire des déformations dans l'éther et ces dernières étant capables d'exercer une force mécanique sur la charge de la matière chargée, c'est une action de l'extérieur du conducteur qui s'exercera sur l'élément de surface en question. Mais les efforts produits par les lignes de force (ou tubes de tension si l'on veut) peuvent être dus soit à leurs tensions longitudinales, soit à leurs pressions transversales : les premières se manifestent dans l'attraction des corps chargés; les secondes, dans leurs répulsions (*).

2° Il est donc possible que la tension électrostatique soit due à la tension le long des lignes de force.

3° Ou qu'elle soit due à leurs pressions transversales.

Examinons successivement ces trois possibilités.

On sait que la simple loi de Coulomb est parfaitement applicable aux cas des charges placées dans le vide et, par suite de l'introduction de la constante diélectrique, dans un milieu homogène et isotrope, dont la constante diélectrique est une quantité bien déterminée et connue. Si le milieu séparant les deux charges n'est pas homogène ou s'il est anisotrope,

---

(*) Il est évidemment indifférent quelle est la nature mécanique de ces pressions.

l'expression de la force pondéromotrice se complique de plus en plus. Considérons pourtant les charges réparties sur un conducteur et qui seront donc toujours séparées l'une de l'autre par un milieu métallique. Quelle sera la force agissant entre les charges dans ce cas? On admet qu'elle est indiquée par la plus simple forme de la loi de Coulomb. On l'admet parce que les faits cadrent avec cette hypothèse et, comme preuve, on considère, comme fait expérimentalement établi, qu'à l'intérieur d'un conducteur il n'y a pas de champ. Cette expérience ne me paraît cependant pas ni probante ni décisive. En effet, un point peut être en équilibre soit quand agissent sur lui deux forces égales et de sens opposé, soit lorsqu'il n'est soumis à aucune force. De même en un point de l'espace, on peut avoir l'obscurité soit par interférence des ondes, soit parce qu'elles n'y arrivent pas. Et c'est avec raison que Barnett (*) insiste sur le fait que de l'expérience de Cavendish ne résulte pas nécessairement la loi de Coulomb. Supposons une sphère métallique infiniment mince dont l'intérieur pourrait être rempli de n'importe quel diélectrique. Si les charges agissent à travers les conducteurs, on devrait constater une variation de la force répulsive des deux hémisphères lorsqu'on change la nature du diélectrique remplissant la sphère. Mais, pourtant, en se basant sur le fait de la non-existence de champ à l'intérieur et sur la formule $F = 2\pi\sigma^2$, on peut assurer que la force ne sera point influencée par le changement en question.

J'avais fait cette expérience toute superflue et dont le résultat n'était pas à douter; la force répulsive de ses deux hémisphères n'est changée en rien si on remplace l'air par de la paraffine à l'intérieur de la sphère.

Mais il y a un autre argument en faveur de l'hypothèse en question. Elle dérive des lois de la distribution, dont les résultats ont été vérifiés à maintes reprises. Ces recherches de

---

(*) S.-J. Barnett, *Phys. Review*, 78, pp. 175-177, 1902.

Coulomb (*), de Riess (**), de Mathiesen (***) et d'autres sont trop connues pour les décrire ici. Au cours même du présent travail, j'ai calculé la capacité de la calotte sphérique en partant de la formule de la distribution, et les résultats sont parfaitement concordants avec l'expérience. La solution fournie par la théorie de l'action à distance peut être sûrement obtenue par l'application de méthodes différentes. Ce problème revient également à trouver la distribution des extrémités des tubes de force possédant une mobilité parfaite sur la surface conductrice et entre lesquels s'exercent des actions déterminées. L'étude de cette question n'est pas suffisamment avancée pour permettre de démontrer que les lois obtenues sont les mêmes, mais tout porte à croire que le problème sera résolu en ce sens.

H. Pellat ([IV]) donne comme la meilleure preuve de l'exactitude de l'expression $F = 2\pi\sigma^2$, pour la force de tension électrostatique, le fait expérimental de la détermination du rapport v de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique de quantité d'électricité, où les résultats obtenus par des méthodes différentes ont donné la valeur. Mais remarquons que, dans toutes les méthodes où l'on a mis en jeu les forces d'origine électrostatique, par exemple, dans celle de W. Thomson ([V]), de Mac Kichan ([VI]), de Maxwell ([VII]), ces forces s'exerçaient entre deux disques chargés de l'électromètre de W. Thomson, où la charge totale, entrant en jeu, se porte sur les côtés des disques restant en face. On a donc un système de conducteurs même fort rapprochés, dont les charges agissantes ne sont séparées que par l'air, ce qui diffère essentiellement de nos conditions

(*) Biot, *Traité de physique*, 2, pp. 273-277; Coulomb, *Mém. de l'Acad. de Paris*, p. 447, 1787.

(**) D.-T. Riess, *Reibungselektricität*, 1, p. 156.

(***) L. Mathiesen, *Fortschr. der Phys.*, p. 423, 1861.

([IV]) H. Pellat, *Bull. de la Soc. philomatique*, t. V, p. 35, 1880.

([V]) J.-C. Maxwell, *Traité, etc.*, t. II, p. 472, Paris, 1885.

([VI]) M. Kichan, *Phil. trans.*, p. 409, 1873.

([VII]) J.-C. Maxwell, *loc. cit.*, t. II, p. 473.

expérimentales. La même remarque s'applique au travail de K. Waitz (*), qui a mesuré le potentiel par la dilatation d'une bulle de savon constituant l'armature interne d'un condensateur sphérique. L'intéressant travail de O. Dörge (**) est, dans sa partie expérimentale se rapportant aux bulles électrisées, purement qualitatif.

Au point de vue théorique, c'est seulement dans la démonstration de Mebius (***) que l'hypothèse n'entre pas, semble-t-il, et malgré cela on arrive à la même valeur de la force de tension. Mais il est facile de voir que sa solution n'est pas unique. Ce physicien fait subir au conducteur les quatre modifications suivantes : 1° la charge, 2° l'échauffement, 3° la décharge, 4° le refroidissement, mais, lors de la dilatation dans la modification 2, on ne tient compte que du travail mécanique $fpdv$ et on néglige le travail des forces électriques. Au fond, M. Mebius émet l'hypothèse que la pression du milieu environnant le conducteur sur ce dernier n'est pas la même dans l'état électrisé et dans l'état non électrisé. Cela admis, il applique le principe de la conservation de l'énergie et il obtient la valeur de cette différence de pression. Il suffit de rappeler ici le travail de V. Schaffers ([IV]) qui montre qu'une telle hypothèse n'est pas conforme à l'expérience. Elle est donc illégitime. Et supposant, à titre d'hypothèse également gratuite, que, sur la surface d'une sphère conductrice isolée, il existe une tension tangentielle analogue à la tension superficielle capillaire et en faisant parcourir à la sphère le même cycle ; désignant de plus par M la charge communiquée à la sphère dans la modification 1, par R le rayon de la sphère, par dQ la quantité de chaleur fournie dans la modification 2, par dv l'accroissement de volume dans la même modification, par α le coefficient de dilatabilité linéaire du métal de la sphère, par f la tension par

(*) K. Waitz, *Wied. Ann.*, 37, pp. 330-337, 1884.
(**) O. Dörge, *Ann. de phys.*, 1, pp. 1-16, 1990.
(***) C.-H. Mebius, *Wied. Ann.*, 61, pp. 638-640, 1897.
([IV]) V. Schaffers, *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, 29, 2e partie.

unité de longueur, on trouve, par un calcul facile, que le principe de la conservation de l'énergie appliqué à ce cycle donne

$$\frac{M^2}{2R} + dQ - pdv - 8f\pi R^2\alpha dt - \frac{M^2}{2R(1+\alpha dt)} - dQ + pdv = 0,$$

d'où f aurait la valeur

$$f = \frac{V^2}{16\pi R}$$

et, en l'appliquant au cas de la répulsion de deux hémisphères, on obtient

$$F = \frac{V^2}{8},$$

valeur identique à celle obtenue par la considération des pressions normales. Évidemment cela veut dire seulement qu'il n'est point nécessaire de supposer que la pression sur la surface d'un conducteur à l'état électrisé est différente de celle qu'il subit à l'état non électrisé et que la solution donnée par A. Mebius n'est pas unique.

En supposant même l'applicabilité de la loi élémentaire aux milieux de conductibilité aussi élevée que celle des métaux, il serait nécessaire de connaître leur constante diélectrique. Or, sauf quelques indications très vagues, cette constante est, pour ainsi dire, absolument inconnue. Nous avons vu plus haut, à propos de l'emploi des forces podéromotrices pour la détermination des constantes diélectriques dans les électrolytes, que cette dernière croît avec la conductibilité. Ainsi, par exemple, la force répulsive de deux charges dans une solution 0,*os* normal de KCl ne serait que $\frac{1}{93}$ partie de celle qui s'exercerait dans le vide. Quelle serait cette force dans un milieu métallique? Nous n'en savons rien.

Il résulte de toutes ces considérations que la première hypothèse doit être écartée.

L'expérience faite avec les cylindres suffit pour écarter aussi la deuxième.

Il ne reste donc que la troisième hypothèse, qui attribue les phénomènes de tension électrostatique aux pressions transversales des lignes de force. Elle peut rendre compte effectivement de tous les faits observés, même de l'action sur une partie d'un disque plan, si l'on suppose que la force entre les lignes ne s'exerce pas seulement au voisinage immédiat de la surface, mais encore le long de toute la ligne.

Mais évidemment, ce n'est qu'une image que l'on peut employer comme à titre d'hypothèse de travail. Vu l'état actuel de la théorie de l'éther et des théories mécaniques en général, il faut la considérer comme provisoire.

ERRATA

—

Page 33, 4e ligne d'en bas :

Imprimé :	*Lire :*
$\frac{x-x}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$	$\frac{x-x'}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$

Page 34, dernière ligne :

$Y = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e_i}{r_i}\right)$	$Y = -e\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e_i}{r_i}\right)$
$Z = -e\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i}{r_i}\right)$	$Z = -e\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e_i}{r_i}\right)$

Page 95, le système d'équations :

$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$	$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$
$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$	$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial r} - \frac{\partial Z}{\partial x}$
$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$	$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$
$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial x} = \text{curl E}$	$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \text{curl E}$

Page 95, dernière ligne :

$\frac{\partial H}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial H}{\partial t}$

Pages 127 et 128, partout où la capacité de l'électromètre est désignée par *c*, *lire* : C.

Page 94, *ajouter :* De Heen admet que c'est l'entraînement axial de l'éther dans les tourbillons qui détermine le champ électrique, c'est-à-dire que ce dernier est caractérisé par un vecteur polaire.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Pages.

CHAPITRE PREMIER. — **Recherches qualitatives** 3

CHAPITRE II. — **Établissement de la loi élémentaire.**

Les recherches précédant celles de Coulomb 12
Les expériences de Coulomb 14
Recherches de Simon, Parrot, Yelin, Mayer, Egen 20
Recherches de Harris, Riess et Marié-Davy 23
Démonstration indirecte de la loi élémentaire 28

CHAPITRE III. — **Théorie de l'action à distance.**

Simple application de la loi de Coulomb. 31
La fonction potentielle des charges discontinues 33
La fonction potentielle des charges continues 35
L'équation différentielle de la fonction potentielle 36
La composante de la force dans une direction donnée. . . . 38
Le théorème de Gauss 40
La force au voisinage de la surface chargée. 42
L'énergie d'un système électrique. 42
Détermination de la force pondéromotrice en partant de l'énergie du système. 45
Démonstration indirecte de la loi de Coulomb en partant de la fonction potentielle 48

CHAPITRE IV. — **Théorie du champ électrique.**

Influence de la nature du milieu séparant les corps électrisés . 50
Théorie de la polarisation diélectrique dans un milieu homogène et isotrope 52

Les forces pondéromotrices dans un milieu homogène et isotrope. 61

Recherches expérimentales basées sur les formules (54) et (55) pour la détermination des constantes diélectriques 63

1. Méthode de Lefèvre 63

2. Méthode de Ziloff 64

3. Méthode de Quincke 66

Théorie de la polarisation et les forces pondéromotrices dans les milieux déformables et à K variable 66

CHAPITRE V. — **La théorie Faraday-Maxwell.**

Les forces pondéromotrices comme résultat de la tension de l'éther 78

Passage de la théorie de la polarisation aux tensions de Maxwell. 84

Démonstrations indirectes de la loi de Coulomb d'après cette théorie 87

CHAPITRE VI.

Théories mécaniques 91

CHAPITRE VII.

Forces pondéromotrices électrostatiques dans un champ magnétique variable 95

CHAPITRE VIII.

Champ électrostatique des courants 101

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER. — **Étude des actions de sphères électrisées.**

Introduction 104

Principe de la méthode de mesures 106

Les sphères employées 106

Les conditions d'isolement 107

Suspension des sphères. 112

Action du champ sur les fils de suspension 114

Réglage des sphères. 117

Procédé de charge 118

Évaluation du potentiel effectif de la sphère au moment de la mesure de la force 120

Mesure des forces. 124

Méthode et corrections des mesures 126
Chute du potentiel le long du circuit 134
Données théoriques 134
Résultats expérimentaux :
I. Action répulsive 140
II. Action attractive 148
Forces attractives et répulsives entre sphères de rayons différents. 151
Conclusions 152

CHAPITRE II. — **Études sur la tension électrostatique.**

Historique. 153
Principe de la méthode des mesures 162
Dispositif expérimental 163
Évaluation du potentiel effectif. 165
Influence du support. 165
Influence des fils de suspension 167
Étude de l'action de demi-sphères 169
Étude de l'action sur les zones sphériques 180
Étude expérimentale. 189
Zones couvertes 198
Étude des cylindres 200
Disques circulaires 202
Conclusions 204
Errata. 211

COUP D'ŒIL

SUR LES

MÉTHODES EMPLOYÉES

POUR DÉTERMINER

LA RIGIDITÉ DU GLOBE

PAR

Henry JANNE

Docteur en sciences physiques et mathématiques,
Ingénieur civil des Mines, Ingénieur électricien,
Répétiteur à l'Université de Liége,
Membre de la Société royale des sciences de Liége,
de la Société scientifique de Bruxelles, etc.

COUP D'ŒIL

SUR LES

MÉTHODES EMPLOYÉES

POUR DÉTERMINER

LA RIGIDITÉ DU GLOBE [1]

INTRODUCTION

L'hypothèse d'un globe terrestre sphérique, homogène et parfaitement rigide est insoutenable [2].

Tout d'abord les mesures géodésiques montrent que la Terre affecte, très sensiblement, la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati dont l'axe mineur coïncide avec la position moyenne de son axe de rotation et dont l'aplatissement est environ de $1/297$.

D'autre part, la densité moyenne de la Terre, prise dans

---

[1] Cet Article a un caractère purement encyclopédique et nullement analytique. Aussi en avons-nous exclu toute recherche mathématique un peu complète. Nous nous proposons d'ailleurs de revenir plus tard sur les théories analytiques de l'équilibre et du mouvement oscillatoire d'une sphère élastique.

[2] Cf. notre Rapport présenté à la Société scientifique de Bruxelles sur le Mémoire de M. E. Pasquier intitulé : Sur les variations de la latitude et les déviations de la verticale. (*Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 36e année, 2e fasc., janvier 1912; *Comptes rendus des séances*, pp. 111-114.)

son ensemble, est à peu près de 5,53 grammes-masse par centimètre cube et vaut ainsi presque le double de la densité moyenne des roches superficielles (environ 2,67), déterminée par mesure directe. On ne peut, dès lors, admettre que le globe soit homogène.

En troisième lieu, les diverses substances minérales (métaux, cristaux, roches, etc.) que l'on a, dans les laboratoires, soumises à expérience, ont toutes présenté un certain degré de compressibilité et de plasticité (visqueuse ou élastique). Il serait donc souverainement irrationnel de supposer que les matières composant le globe offrent, dans leur ensemble, une incompressibilité et une rigidité parfaites.

D'ailleurs certaines considérations cosmogoniques, certains phénomènes d'ordre géologique ou astronomique paraissent demander qu'au moins une partie de l'intérieur du globe soit susceptible de se déformer.

Si maintenant, pour ces diverses raisons, on imagine que la Terre ait une constitution quelconque, autre que celle d'un solide parfaitement rigide et incompressible, on doit immédiatement conclure que cette Terre doit céder, au moins dans une certaine mesure, aux réactions centrifuges qu'évoque sa rotation et aux forces attractives qui émanent de la Lune, du Soleil et des planètes, comme le font les océans qui recouvrent sa surface. Ces déformations propres du globe (*marées terrestres*) peuvent s'évaluer, comme l'a montré Lord Kelvin, par la mesure précise de la *réduction qu'elles font subir aux marées océaniques apparentes*. C'est un premier moyen — le plus direct — de déterminer le degré de plasticité du globe, mais non pas le seul, ni même le plus aisé.

Un fil à plomb, ou encore un pendule horizontal, placé en un lieu géographique, doit, en vertu même de la déformation de la masse attractive de la Terre et du changement de position, relative à cette Terre, des astres perturbateurs, subir une déviation propre, en même temps que le plan tangent au sphéroïde terrestre, au lieu considéré (qui est le plan de référence pour les déplacements du pendule), doit éprouver un

changement d'orientation. Pour ce double motif, le fil à plomb doit, vis-à-vis de ce plan, changer de position; et comme sa direction définit la verticale du lieu, on dit qu'il se produit une déviation de la verticale. La mesure de la *déviation de la verticale* constitue un deuxième moyen de déterminer le degré de plasticité du globe.

Enfin, comme la Terre n'est plus supposée parfaitement rigide et que, de plus, on constate journellement qu'il se produit des déplacements relatifs à sa surface et des changements dans la répartition des masses à la partie supérieure de son écorce (d'ordre volcanique, glaciaire, hydrologique, météorologique, etc.), on ne peut plus logiquement appliquer au globe les lois du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, et on doit recourir à la théorie du mouvement de rotation d'un corps variable (3). Les circonstances de son mouvement deviennent beaucoup plus complexes; en particulier son axe instantané de rotation (4), en éprouvant des variations de direction régies par une loi moins simple, engendre un cône à directrice entortillée, même si les hypothèses que l'on fait sur sa constitution sont élémentaires.

Les pôles instantanés de rotation, c'est-à-dire les intersections de l'axe instantané avec la surface du globe, doivent donc décrire des courbes presque inextricables. Il nous reste à dire quel est le phénomène qui permet de déterminer ces trajectoires complexes et le mouvement des pôles sur ces trajectoires, et par là-même de donner des indications sur le degré de rigidité du globe.

La colatitude géographique d'un lieu est l'angle que fait la verticale du lieu avec l'axe instantané de rotation de la Terre.

Comme nous venons de le dire, la verticale, outre un

---

(3) Voyez, par exemple, notre Travail : Sur la variation des latitudes (*Mém. Soc. roy. Sc. de Liége,* [3], t. VIII, 1909, 3e partie.)

(4) On peut encore parler d' « axe instantané de rotation » lorsque le corps n'est plus rigide, grâce à une convention. (H. Janne, Mém. cité à la note 3, 3e partie.)

déplacement apparent dû au changement d'orientation du plan de référence, subit encore une déviation propre due aux variations de forme ou de position des différents astres et évidemment aussi aux variations des réactions centrifuges causées par le déplacement de l'axe de rotation. En vertu même de ce dernier déplacement et de la déviation de la verticale, l'angle que font ces deux droites doit varier, c'est-à-dire qu'il doit se produire une *variation de latitude* géographique, variation que l'on peut déceler par des observations astronomiques faites avec soin. D'où l'on déduit un troisième moyen de déterminer expérimentalement la plasticité de la Terre.

Une quatrième méthode repose sur la théorie de la propagation des ondes sismiques. Il est bien clair que la vitesse et d'autres caractéristiques du mode de propagation des ondes d'ébranlement (qui constituent les tremblements de terre ou leurs frissons précurseurs), déterminées avec précision, permettront d'obtenir des indications précieuses sur la constitution élastique de l'écorce terrestre.

I.

Ces quatre méthodes reposent elles-mêmes sur la théorie de l'équilibre et du mouvement vibratoire d'une sphère élastique.

Les premiers qui se soient préoccupés de l'équilibre d'une sphère élastique, soumise à des forces quelconques s'exerçant à sa surface, paraissent être G. Lamé (5) et H. Résal (6); ces auteurs supposaient la sphère homogène, incompressible et isotrope, et n'avaient pas égard aux forces « de volume » pouvant s'exercer sur les différents points de la sphère.

Indépendamment de ces auteurs, Lord Kelvin, reprenant la théorie des harmoniques sphériques, déjà employée du reste par ceux-ci et P.-S. de Laplace, a donné, en 1863, une étude beaucoup plus complète et susceptible de féconds développements (7), étude qui a été, depuis lors, reproduite dans divers Ouvrages du même auteur (8). Kelvin étudie l'équilibre élastique d'une couche sphérique homogène, isotrope et incompressible, dont les déplacements ou les tensions aux sphères-limites sont données et dont les molécules sont soumises à des

---

(5) Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* [Liouville], t. XIX, 1854, pp. 51-87); *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris, 1859, 17e, 18e et 19e leçons.

(6) *Sur les équations de l'élasticité et leurs applications à l'équilibre d'une croûte planétaire*, Paris, 1855. *Traité élémentaire de mécanique céleste*, Paris, 1865.

Cf. aussi I. Todhunter et K. Pearson, *History of Elasticity*, Londres, 1893, 2¹, § 561, p. 385; H. Burkhardt, *Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen*, Leipzig, 1901-1908, § 93, p. 1034.

(7) Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, Londres, t. CLIII, 2e partie, 1863, art. 28, pp. 583-616.)

(8) W. Thomson et P.-G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Cambridge, t. II, 4e édit., 1903. §§ 735-737, pp. 284-297, et §§ 834-842, pp. 427-439; *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge, t. III, 1890, pp. 351 et suiv.

forces extérieures « de volume » admettant un potentiel W : ce dernier satisfaisant d'ailleurs à $\nabla^2 W = 0$ en tout point de la masse; il en déduit, comme cas particulier, la théorie de l'équilibre élastique de la sphère. Il montre aussi que, pour arriver à la solution, il y a avantage à employer les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z; ses prédécesseurs avaient fait usage de coordonnées polaires.

G. H. Darwin [9] a montré comment le procédé synthétique qu'emploie Kelvin pour combiner les effets de l'attraction mutuelle des molécules, avec ceux de la cohésion élastique, peut être remplacé avantageusement par une méthode analytique. Il s'est demandé aussi si l'on ne pourrait appliquer la théorie de Kelvin aux sphéroïdes visqueux et élastico-visqueux incompressibles; cette dernière étude a été reprise depuis lors par H. Lamb [10]. Trois ans plus tard, Darwin a publié une belle étude de l'application à la Terre de la théorie de l'équilibre élastique concernant les tensions qui doivent régner en son intérieur [11].

Dans son mémoire de 1863, Kelvin a donné aussi quelques indications sur les vibrations d'une sphère liquide [12].

---

[9] On the bodily Tides of viscous and semi-elastic Spheroids... (*Phil. Trans.*, Londres, t. CLXX, 1re partie, 1879, art. 1er, pp. 1-35); Note on a previous Paper (*Proceedings of the Royal Society*, Londres, t. XXXVIII, 1885, pp. 322-328). Quant au premier point, voyez spécialement le Mémoire cité en premier lieu, § 2, p. 5; *Natural Philosophy*, t. II, 4e édit. (revue par Darwin), Cambridge, 1903, art. 840', pp. 437-439; C. Chree, The equations of an isotropic solid in polar and cylindrical coordinates (*Transactions of the Philosophical Society*, Cambridge, t. XIV, 1889, pp. 250-369), spécialement section IV, pp. 278-286; et surtout A. E. H. Love. *The mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 2e édit., 1906, chap. XI, art. 181, p. 250.

[10] On the Oscillations of a viscous Spheroid (*Proceedings of the Mathematical Society*, Londres, t. XIII, 1881, pp. 51-66.) Au sujet de la dénomination « élastico-visqueux », cf. J. G. Butcher, On Viscous Fluids in Motion (*Ibidem*, t. VIII, 1876, pp. 103-135.)

[11] On the Stresses caused in the Interior of the Earth by the Weight of Continents and Mountains (*Phil. Trans.*, Londres, t. CLXXIII, 1re partie, 1882, pp. 187-230.)

[12] Mémoire cité à la note 7, §§ 55-58, pp. 608-610.

Avant lui, G. Lamé [13], reprenant après S.-D. Poisson [14] et G. Stokes [15] le problème de la vibration d'un milieu élastique homogène et isotrope [16], avait appliqué sa solution à la sphère; toutefois il commettait une erreur, qui a été signalée depuis lors par H. Lamb [17].

A. Clebsch [18], L. Henneberg [19], P. Järisch [20], C. Chree [21] ont aussi étudié les oscillations élastiques d'une sphère isotrope et ont apporté, à leur théorie, des contributions importantes. C'est Järisch et Lamb qui ont donné la classification générale des oscillations normales.

Lord Rayleigh s'est demandé si, dans un milieu élastique, homogène et isotrope, limité par une surface, il ne se propage pas des ondes n'affectant pratiquement que les régions voisines de la surface et a ainsi découvert les ondes superficielles qui portent son nom [22].

---

[13] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1re édit., 1852, 11e leçon.

[14] *Mémoires de l'Ac. des Sc.*, Paris, t. VIII, 1829; t. X, 1831. Voir aussi G. Green, *Trans. Phil. Soc.*, Cambridge, t. VII, 1839, pp. 121 et suiv.; *Papers*, pp. 293 et suiv.

[15] On the dynamical Theory of diffraction (*Trans. Phil. Soc.*, Cambridge, t. IX, 1849, pp. 1 et suiv.; *Math. and Physical Papers*, t. II, pp. 243 et suiv.

[16] Voyez aussi G. Wertheim, Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps solides et liquides (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. XXIX, 1849, pp. 697-760; *Ann. Chimie et Phys.*, (3), t. XI, 1851, pp. 19-36).

[17] On the Vibration of an elastic Sphere (*Proceed. Math. Soc.*, Londres, t. XIII, 1882, pp. 189-212), spécialement p. 195. Voyez aussi, du même auteur, On the Vibrations of a spherical Shell (*Ibidem*, t. XIV, 1882, pp. 50-56).

[18] Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche (*Journal für die reine und angewandte Mathematik* [Crelle], t. LXI, 1863, pp. 195-262); *Theorie der Elastizität fester Körper*, Leipzig, 1862. § 20. Voyez aussi A. Wangerin, *Ueber das Gleichgewicht elastischer Rotationskörper*, Berlin, 1873.

[19] Ueber die elastische Schwingungen einer isotropen Kugel (*Annali di Matematica*, [2]. t. IX, 1879, pp. 173 et suiv.).

[20] Ueber die elastische Schwingungen einer isotropen Kugel (*Journal f. d. r. and a. Math.* [Crelle], t. LXXXVIII, 1880, pp. 131-145); Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen... (*Ibidem*, t. CIV, 1889, pp. 177-210).

[21] Mémoire cité à la note 9, chap. VIII.

[22] On Waves propagated along the plane Surface of an elastic Solid.

T. J. l'A. Bromwich ([23]) a recherché l'influence que peut avoir la self-attraction des molécules d'un milieu élastique incompressible sur son mode de vibrations; et tout récemment A. E. H. Love ([24]) a complété son étude en l'affranchissant de l'hypothèse de l'incompressibilité. K. Zöppritz ([25]), E. Wiechert ([26]), H. Lamb ([27]) et C. G. Knott ([28]) ont entretemps publié des Travaux pleins de valeur sur la propagation des ondes dans un milieu élastique limité.

Mais revenons un peu en arrière. C. Chree ([29]) a publié une série d'études de premier ordre relatives à nos deux problèmes, études qui servent souvent aujourd'hui de point de départ pour les recherches analytiques. A. E. H. Love a écrit aussi des Mémoires fort importants dont les premiers ([30]) s'attachent à

(*Proc. Math Soc.*, Londres, t. XVII, 1885, pp 4-11; *Papers*. t. II, pp. 441 et suiv.) Voyez aussi A. E. H Love, Ouvrage cité à la note 9, chap XIII, § 214, pp. 295-297; M. P. Rudzki *Physik der Erde*. Leipzig, 1911, chap. V, § 3, pp. 151-158

([23]) On the Influence of Gravity on elastic Waves... (*Proc. Math. Soc.*, Londres, t. XXX, 1898, pp 98-120.)

([24]) *Some Problems of Geodynamics*, Cambridge, 1911, chap. X, pp 126-143.

([25]) Constitution of the Interior of the Earth (*Quarterly Journal of the Geological Society*, Londres, t. LXII, 1906, pp. 456-473) et avec Wiechert l'Article de la note suivante.

([26]) Ueber Erdbebenwellen (*Nachrichten der K. Gesellschaft der Wiss.*, Göttingen, [Sc. math.-phys.], 1907, pp. 415-549); etc.

([27]) On Wave-propagation in two dimensions (*Proc. Math. Soc.*. Londres. t. XXXV, 1902, pp. 141 et suiv.); *The Propagation of Tremors...* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A. t. CCIII, 1904, pp. 1-42.)

([28]) *The Physics of Earthquake Phenomena*, Oxford, 1908, et divers Articles parmi lesquels : Earthquakes and Earthquake Sounds... (*Trans. Seismol. Soc. of Japan*. t. XII, 1888, pp. 115-136; *Philos. Mag.*, Londres, juillet 1899); Seismic radiations... (*Proc. Roy. Soc.*, Edimbourg, t. XXVIII, 3e partie, 1908, n° 12, pp. 217-230), etc.

([29]) *Transactions of the Philosophical Society*, Cambridge, t. XIV, pp. 250, 467; t. XV, pp. 1, 139, 313, 339; t. XVI, pp. 14, 133; t. XVII, p. 201; *Quarterly Journal of Mathematics*, Londres, t. XXI, 1886, p. 193; t. XXIII, 1888, p. 11; *Philosophical Magazine*, Londres, (5), t. XXII, 1891, pp. 233, 342. Voyez aussi K. Pearson, *Quarterly Journal of Mathematics*, Londres. t. XVI, 1879, pp. 75 et suiv.

([30]) On Sir W. Thomson's estimate... (*Trans. Phil. Soc.*, Cambridge,

compléter la solution que Kelvin a donnée du problème de l'équilibre élastique, en étudiant notamment les effets d'un certain degré de compressibilité.

G. H. Darwin semble être le premier qui ait recherché (31) l'influence, sur les résultats de Kelvin, de l'hétérogénéité; mais la loi des densités qu'il admet paraît un peu artificielle.

G. Herglotz a donné une magnifique extension (32) de la théorie de Kelvin en supposant que la sphère est incompressible et a une densité variant suivant la loi de Roche, puis suivant celle de Wiechert. Avant lui, S. S. Hough (33) et M. P. Rudzki (34) avaient déjà fait diverses applications de la théorie de Kelvin.

W. Schweydar (35), en partant des équations en coordonnées polaires données par Chree, a réussi aussi à en faire un heureux usage.

J. H. Jeans (36) a étudié la stabilité de l'équilibre d'une

---

t. XV, 1890, pp. 107-118) et aussi (*Proc. Math. Soc.*, Londres, t. XIX, 1888, pp. 170 et suiv.). Ces Mémoires ont été corrigés et complétés par l'auteur dans son *Elasticity*, chap. XI.

(31) Note on Thomson's theory of the Tides of an elastic Sphere (*Messenger of Mathematics*, Londres, t. VIII, 1879, pp. 23-26; *Scientific Papers*, t. II. pp. 33 et suiv.).

(32) Ueber die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte (*Zeitschrift für Mathematik und Physik* [SCHLÖMILCH], t. LII, 1905, pp. 275-299).

(33) The Rotation of an elastic Spheroid (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A, t. CLXXXVII, 1896, art. 8, pp. 319-344).

(34) Teorya fizycznego stanu kuli ziemskiej (*Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności*, Cracovie. t. XXXVII, pp. 225-420); Theorie des physischen Zustandes der Erdkugel (*Bull. intern. Ac. Sc.*, Cracovie, 1899, n° 31, pp. 283-311), et autres Mémoires dans le même volume.

(35) Ein Beitrag zur Bestimmung des Starrheitskoeffizienten der Erde (*Beiträge zur Geophysik* [GERLAND], t. IX, 1907, pp. 41-77). Voyez aussi ses récents Travaux cités à la note 41.

(36) The Stability of a Spherical Nebula (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A, t. CXCIX, 1901, pp. 1 et suiv.); On the Vibrations and Stability of a Gravitating Planet (*Ibidem*, t. CCI, 1903, pp. 157-184).

nébuleuse sphérique, puis d'une planète sphérique élastique, en considérant les effets dus à la self-attraction des molécules.

Lord Rayleigh ([37]) a discuté et corrigé certains points du second Mémoire de Jeans et, en particulier, a montré l'importance de la considération de la « tension initiale »; A. E. H. Love, s'inspirant des remarques de Rayleigh, a traité magistralement le problème de la stabilité de gravitation ([38]). Dans un Mémoire postérieur ([39]), il a démontré aussi que la restriction de Herglotz, quant à l'incompressibilité, peut être levée; et, dans son dernier Ouvrage ([40]), il a donné les résultats de ses recherches, aussi profondes qu'originales, sur les problèmes de l'équilibre et du mouvement d'une sphère élastique. Tout récemment, W. Schweydar ([41]) a publié un Travail important où il étudie principalement l'influence que peut avoir une mince couche de magma fluide, située sous une écorce peu épaisse, sur les déformations de cette écorce et sur les déviations du pendule; il examine aussi l'influence que les mers peuvent avoir sur la période de libre précession, pour-

---

([37]) On the dilatational Stability of the Earth (*Proc. Roy. Soc.*, Londres, A, t. LXXVII, 1906, pp. 486-499).

([38]) The gravitational Stability of the Earth (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A, t. CCVII, 1908, pp. 171-241). Pour une analyse de ce Mémoire et des deux précédents, on peut consulter le Rapport de E. H. Hills cité plus bas, à la note 117. Voyez aussi la dissertation de A. Brill mentionnée à la note 44.

([39]) The Yielding of the Earth to disturbing Forces (*Proc. Roy. Soc.*, Londres, A, t. LXXXII, 1909, n° 551, pp. 73-88; extrait paru dans *Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc.*, Londres, t. LXIX, 1909, n° 6, pp. 476-479). Voyez aussi J. Larmor, The Relation of the Earth's free Precessionnal Nutation to its Resistance against tidal Deformation (*Proc. Roy. Soc.*, Londres, A, t. LXXXII, 1909, n° 551, pp. 89-96; *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, Londres, t. LXIX, 1909, n° 6, pp. 480-486).

([40]) Ouvrage cité à la note 24.

([41]) Untersuchungen über die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschicht (*Veröffentlichung des Königlich Preussischen Geodätischen Institutes*, Potsdam, 1912, nouvelle série, n° 54). Voir aussi un second Mémoire du même auteur, paru tout récemment : Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond (*Ibidem*, 1914, nouvelle série, n° 59).

suivant ainsi les recherches de Rudzki (42), Herglotz (43) et Brill (44).

T. Shida (45) a publié aussi un Travail important relatif à ces problèmes ardus.

Nous avons à dessein exclu de notre résumé toute allusion aux Travaux qui résolvent ces problèmes par la « méthode des singularités » (46) au lieu de la « méthode des séries harmoniques » (47).

Pour ce qui concerne le problème de l'équilibre de la sphère élastique, on consultera avec fruit l'excellent Traité de A. E. H. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 2e éd., 1906, ch. XI, et l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, t. IV, art. 25 (O. Tedone et A. Timpe, *Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper*), spéciale-

---

(42) Mémoire cité à la note 34.

(43) Mémoire cité à la note 32.

(44) A. Brill, *Ueber die Elastizität der Erde*, Göttingen (dissertation) 1908.

(45) T. Shida, On the elasticity of the Earth and the Earth's crust (*Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto Imperial University*, Kyoto, novembre 1912, t. IV, n° 1).

(46) Cf. Love, *Elasticity*, Introduction, p. 15.

(47) Voici une liste que donne l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* pour les Travaux employant la méthode des singularités :

V. Cerrutti, *Assoc. fr. Avanc. des Sc.* (*Comptes rendus*), 14e session, 2e partie, 1885, p. 68; *Rendiconti d. Accad. d. Lincei*, Rome, (4), t. II, 1, 1886, pp. 461, 586; t. V, 2, 1889, p. 189; *Mem. d. Accad. d. Lincei*, Rome, (4), t. VII, 1891, p. 25; *Il Nuovo Cimento*, Pise, (3), t. XXXIII, 1893, pp. 97, 145, 202, 259.

C. Somigliana, *Ann. Sc. Norm.*, Pise, t. IV, 1887, p. 101.

R. Marcolongo, *Rendiconti d. Accad. d. Lincei*, Rome, (4), t. V, 2, 1889, p. 349; (5), t. I, 1, 1892, p. 335; *Ann. di Mat.*, (2), t. XXIII, 1895, p. 111.

G. Lauricella, *Ann. Sc. Norm.*, Pise, t. VII, 1895, p. 81; *Ann. di Mat.*, (3), t. VI, 1901, p. 289.

E. Almansi, *Mem. Accad. Rend. d. Sc.*, Turin, (2), t. XLVII, 1897, p. 103; *Ann. di Mat.*, (3), t. II, 1898, p. 34.

E. et F. Cosserat, *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. CXXVI, 1898, p. 1089; t. CXXXIII, 1901, p. 326.

J. H. Michell, *Messenger of Mathematics*, Londres, (2), t. XXX, 1900, p. 16.

J. Hadamard, *Ann. Éc. Norm.*, Paris, t. XVIII, 1901, p. 313.

O. Tedone, *Ann. di Mat.*, (3), t. VIII, 1902, p. 147; *Rendiconti di Circ. mat.*, Palerme, t. XVII, 1903, p. 241.

ment n^os 3-4, pp. 135-143; et pour le problème des vibrations, Love, *Elasticity*, ch. XII, et *Encyk. d. m. Wiss.*, t. IV, art. 29 (H. Lamb, *Schwingungen elastischer Systeme* ..), spécialement n° 8, pp. 301-310, et aussi H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 3e éd., 1906.

Disons pour terminer que le dernier Travail de Love (cité à la note 24) expose admirablement les derniers progrès que les géomètres modernes ont faits dans la résolution de ces problèmes difficiles.

II.

Nous admettrons, pour les théories qui vont suivre, que la Terre est sphérique ([48]) et de densité moyenne 5,53 grammes-masse par centimètre cube ([49]); la plupart des

---

([48]) Pour ce qui concerne la détermination de l'aplatissement du globe, au moyen de la mesure d'arcs de méridien, de l'étude des variations de la gravité, des phénomènes de précession et de nutation luni-solaires, des inégalités du mouvement de la Lune, etc., on peut consulter, par exemple :

Airy, *Encycl. Metropol.*, Londres, 1830; *The Figure of the Earth*, Londres, 1830.

Bessel, *Abhandlungen*, t. III; *Astr. Nachr.*, Kiel, t. XIV, 1837.

H. Bruns, *Die Figur der Erde*, Berlin, 1878.

Clarke, *Geodesy*, Oxford, 1880.

E. Hill, *Lunar Inequalities due to the Ellipticity of the Earth*, Washington, 1884.

F. R. Helmert, *Die mathematischen und physikalischen Theorien des höheren Geodäsie*, Leipzig, t. II, 1884.

Harkness, The Solar Parallax and its related Constants (*Washington Observ. for 1885*, App. 3, pp. 138 et suiv.)

F. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, Paris, t. II, 1891, chap. XX et XXI.

F. R Helmert, Die Grösse der Erde (*Sitzungsberichte der Kg. Ak. d. Wiss.*, Berlin, 1906, pp. 525 et suiv.).

H. Buchholz, *Das mechanische Potential...*, Leipzig, t. I, 1908.

M. P. Rudzki, *Physik der Erde*, Leipzig, 1911, chap. I, § 7, pp. 25 et suiv., etc., etc.

([49]) Pour ce qui se rapporte aux mesures du coefficient d'attraction et de la densité moyenne de la Terre, mentionnons :

H. Cavendish, Experiments to determine the Density of the Earth (*Phil.*

auteurs ([50]) ont jugé qu'on peut admettre ici le principe de la superposition des petites déformations et que, en conséquence, on peut ajouter aux variations d'ellipticité dues aux forces perturbatrices une ellipticité permanente; Love a examiné, récemment, les choses de plus près ([51]).

Par mesure directe, nous ne pouvons connaître que la densité des roches voisines de la surface du globe et de quelques laves. Rosenbusch indique ([52])

Tuf volcanique . 1,40	Lave de trachyte 2,63	Schiste argileux. 2,81
Roches calcaires et siliceuses . 2,10	Granit . . . 2,68	Lave de basalte 2,99
Syénite . . . 2,54	—	—

en unités C.G.S. D'après la Table dressée par Damour, dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes pour 1910*, page 335 :

Calcaire grossier. 1,94 à 2,06	Porphyre. 2,61 à 2,94	Marbres calcaires 2,65 à 2,47
Grès des Vosges . 2,19 à 2,25	Syénite . 2,63 à 2,75	Schiste . . . 2,64 à 2,90
Gypse . . . . 2,17 à 2,20	Granit . 2 63 à 2,75	Trachyte . . . 2 70 à 2,80
Grès quartzeux . 2,55 à 2,65	Quartzite. 2,65 —	Dolomie . . . 2,82 à 2,85
—	—	Basalte . . . 2,78 à 3,10

Trans. Roy. Soc., Londres, 1798, II, pp. 469-526); traduction française par N. M. Chompré (*Journ. de l'École polyt.*, Paris, 1815, t. XVII, pp. 263 320).

A. Cornu et J.-B. Baille, Méthode pour déterminer la densité de la Terre (*Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. LXXVI, 1873, pp. 954-958, et t. LXXXVI, 1878, pp. 699-702).

J. H. Poynting, On a method... and its Employment to determine the mean Density of the Earth (*Proc. Roy. Soc.*, Londres, t. XXVIII, 1878 pp. 2-35); *Bull. astr.*, Paris t. II, 1884, p. 260.

Ph. von Jolly, *Annalen der Physik und Chemie* (Wiedemann), nouv. série, t. V, 1872, p. 112, et t. XIV, 1881, p. 331;

Enfin les Travaux de Bougner, Maskeline, Hutton, Carlini, Reich, Baily, Airy, James, Clarke, Mendenhall, von Sterneck, König, Richarz, Krigar-Menzel, Wilsing, Láska, Boys, etc., résumés dans les synthèses :

J. H. Poynting, On a Determination of the mean Density of the Earth (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A, t. CLXXXII, 1891, pp. 565-656) et

C. V. Boys, La constante de la gravitation (*Revue des sciences pures et appliquées*, Paris, t. VII, 1897, pp. 46-59).

([50]) Cf. les mémoires cités de Kelvin, Darwin, Hough, Rudzki, etc.

([51]) Ouvrage cité à la note 24, chap. VI, pp. 75-88.

([52]) Cité par Rudzki, Ouvrage mentionné à la note 22, chap. IV, § 1, p. 99.

E. Roche prend 2,584 comme densité moyenne des roches superficielles ([53]); mais Harkness indique ([54]) 2,67 pour la densité « continentale » et 2,40 pour la densité moyenne de la croûte, à 10 milles anglais de profondeur.

En comparant ces chiffres à la densité moyenne 5,55 de la Terre, prise dans son ensemble, nous sommes amenés à conclure qu'on ne peut considérer la Terre comme homogène, et que les parties du globe voisines du centre doivent être composées de substances très denses, de densités comparables à celles des métaux.

D'autre part, les expériences de Tresca ([55]), de Saint-Venant ([56]), de Wertheim ([57]), de Kohlrausch ([58]), de Macleod et Clarke ([59]), de Voigt ([60]), d'Amagat ([61]), de Searle ([62]), de Gray ([63]), de Nagaoka ([64]), de Kusakabe ([65]), d'Adams et Coker ([66]), etc., ont montré que les constantes élastiques λ, μ des diverses substances minérales ont toutes des valeurs finies, ayant pour ordre de grandeur 10^{11} ou 10^{12} dynes par centimètre carré.

Notre but est précisément d'exposer le principe des méthodes qui permettent, indirectement, de déterminer les constantes élastiques de ces substances *in situ*, et non de faire cette déter-

---

([53]) *Mém. Acad. Sc.*, Montpellier, 1848; *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. XXXIX, 1854.

([54]) Mémoire cité à la note 48; et *Smithsonian Physical Tables*, t. LVIII, n° 1, 1910, table 89, p. 108.

([55]) *Mém Sav. étr.*, Paris, t. XVIII.

([56]) *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. XVII, 1843, et t. XIX, 1844.

([57]) *Ann Chim. Phys.*, (3), t. XII, 1844, et *Pogg. Ann.*, t. LXXVIII, 1849.

([58]) *Pogg. Ann.*, t. CXLI, 1871.

([59]) Cité par KELVIN (art. Elasticity dans *Encycl. Brit.*, § 65).

([60]) *Wied. Ann.*, t. XLVIII, 1893.

([61]) *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t CVIII, 1899.

([62]) *Phil. Mag.*, Londres, (5), t. XLIX, 1900.

([63]) *Proc. Roy. Soc.*, Londres, t. LXVII, 1900.

([64]) *Public. Earthquake Inv. Comm.*, Tokyo, 1900, n° 4.

([65]) *Ibidem*, 1900, n° 22.

([66]) *Publ. Carnegie Inst.*, 1906, n° 46.

mination directement, en extrayant du sol quelques échantillons et en soumettant ces derniers à des expériences de laboratoire, telles que les essais de traction, compression, flexion, etc.

Adams et Coker donnent les résultats suivants de mesures faites sur des échantillons de diverses substances [67]; en les supposant homogènes et isotropes, leurs constantes λ, μ sont reliées au module de Young E et à l'inverse $m = \frac{1}{\sigma}$ du rapport de Poisson σ par [68]

$$\lambda = \frac{Em}{(m+1)(m-2)} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)},$$

$$\mu = \frac{Em}{2(m+1)} = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

et le module de compressibilité est donné par

$$k_1 = \frac{Em}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\sigma)}.$$

Adams et Coker ont mesuré directement E et m et ont calculé σ, k_1 et un certain module de glissement; nous-même avons calculé λ et μ.

SUBSTANCES.	E en 10^{11} dynes par cm².	σ	λ en 10^{11} dynes par cm².	μ en 10^{11} dynes par cm².	k_1 en 10^{11} dynes par cm².
Fer forgé	19,37	0,2800	9,631	7,566	14,680
Fonte	10,34	0,2500	4,014	4,014	6,897
Marbre noir de Belgique.	7,24	0,2780	3,548	2,833	5,736
Marbre de Carrare . .	5,54	0,2744	2,644	2,174	4,090
Calcaire de Montréal . .	6,35	0,2522	2,580	2,535	4,250
Granite de Baveno. .	4,71	0,2528	1,923	1,880	3,179
Syénite néphéline. . .	6,29	0,2560	2,627	2,504	4,290
Diabase de Sudbury . .	9,49	0,2840	4,858	3,695	7,329
Grès d'Ohio.	1,58	0,2900	0,847	0,613	1,250
Verre	7,24	0,2273	2,459	2,950	4,439

[67] Article cité à la note 66, p. 69.

[68] Cf. Love, *Elasticity*, chap. III, art. 70, *a*, p. 101.

Il est clair que ces exemples ne sont donnés que pour montrer l'ordre de grandeur de la compressibilité et de la rigidité des roches : ces substances ne peuvent, en aucune façon, être considérées comme isotropes ([69]).

Quelque modifiées que puissent être les propriétés élastiques lorsque ces substances font partie du globe ([70]), on ne peut cependant imaginer que ces substances possèdent alors une rigidité et une incompressibilité parfaites ($\mu = \infty$, $k = \infty$).

III.

Comme nous l'avons fait observer dans l'Introduction, des géologues, géophysiciens, hydrodynamistes, astronomes, etc., ont exposé tour à tour les raisons pour lesquelles, d'après eux, la Terre devrait être, au moins en partie, susceptible de se déformer ([71]). Nous ne pouvons absolument pas entrer ici dans le détail de leurs discussions; nous nous bornerons seulement à renvoyer le lecteur à quelques-uns de leurs Travaux.

([69]) Voyez aussi *Smithsonian Physical Tables*, t. LVIII, n° 1, tables 47-52, pp. 74-76; J. D. Everett, *Fluctuations of the C. G. S. Units*, Londres, 1891; Amagat, *Journal de Physique*, (2), t. VIII, 1889; etc.

([70]) Cf. Rudzki, Ouvrage cité à la note 22, ch. V, § 4, p. 161.

([71]) Voyez, par exemple, W. Hopkins, Researches in physical Geology (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, 1839, pp. 381-424; 1840, pp. 193-208; 1842, pp. 43-55); H. Hennessy, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, 1851; Lord Kelvin, On the Rigidity of the Earth (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, t. CLIII, 1863, pp. 573-582); Delaunay, *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. LXVII, 1868, pp. 65-70; H. Faye, Ibidem, *passim*; F. Folie, *Bull. Ac. roy. Belg.*, Bruxelles, *passim*; R. Radau, *Bull. astr.*, Paris, *passim*; Belli, *Giorn. I. R. Ist. Lombard.*, nouv. série, t. X, 1851; E. Ronkar, *Sur l'influence du frottement...* et *Sur l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestre*, Bruxelles, 1888 et 1889; A. Ritter, *Wied. Ann.*, 1876, etc., etc., résumés dans : F.-R. Helmert, Ouvrage et tome cités à la note 48; P. Schwahn, *Ueber Aenderungen der Lage...*, Berlin, 1887; F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48; M.-P. Rudzki, Ouvrages cités aux notes 22 et 34; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, 2e partie, § 1; etc.

Voyez aussi Ch. Contejean, *Éléments de Géologie et de Paléontologie*, Paris, 1874; A. de Lapparent, *Traité de Géologie*, Paris, 3e éd., 1893; E. Haug, *Traité de Géologie*, Paris, 1907, etc.

IV.

Première méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des marées océaniques apparentes.

Si l'on suppose donc, pour toutes ces raisons, que la Terre ait une constitution quelconque, autre que celle d'un solide parfaitement rigide et incompressible (soit celle d'un fluide parfait, soit celle d'un fluide visqueux, soit celle d'un solide élastique, soit celle d'un corps composé de parties solides, liquides et même gazeuses, etc.), on doit immédiatement conclure que cette Terre doit céder, au moins dans une certaine mesure, aux réactions centrifuges qu'évoque sa rotation ([72]) et aux forces attractives qui émanent de la Lune, du Soleil et des planètes ([73]), comme le font les océans qui recouvrent sa surface ([74]).

Ces déformations propres du globe, qu'on nomme *marées terrestres* par opposition aux marées proprement dites que l'on appelle dès lors *marées océaniques*, peuvent s'évaluer, comme

---

([72]) Puisque la Terre tourne vis-à-vis d'axes fixés au « solide stellaire », par rapport auxquels les principes fondamentaux de la Dynamique sont vrais, au moins d'une manière très approchée [cf. E. Pasquier, La Terre tourne-t-elle? (*Revue de l'Univ. de Bruxelles*, mars 1904), p. 17 et H. Janne, Les nouvelles expériences relatives à la démonstration mécanique de la rotation de la Terre (*Revue des questions scientifiques*, Louvain, t. XXIV, 1er fasc., juillet 1913), § I, pp. 9-13].

([73]) L'influence des planètes est absolument négligeable vis-à-vis de l'action luni-solaire.

([74]) Pour ce qui concerne le problème des marées, consultez M. Lévy, *Théorie des marées*, Paris, 1898; Ph. Hatt, Des marées (*Encycl. Léauté*, n° 112B); Théorie élémentaire des marées (*Ann. Bur. Longit.*, Paris, *pour 1904*, notice B, pp. 1-53 et *pour 1905*, notice A, pp. 1-74), etc., et surtout G.-H. Darwin et S.-S. Hough, Bewegung der Hydrosphäre (*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, t. VI, 1re partie, B, art. 6, 1908); H. Poincaré, *Traité de Mécanique céleste*, Paris, t. III, 1910; G.-H. Darwin, article « Tide » dans *Encycl. Brit.*, Londres, 11e éd., 1910-1911.

l'a fait remarquer Lord Kelvin ([75]), par la réduction qu'elles font subir aux marées océaniques.

Il est clair que si la Terre était parfaitement fluide ou plutôt aussi fluide que les mers, en l'absence de points fixes de repère on ne pourrait observer trace de marée : le pêcheur, en pleine mer, ignore la marée ([76]).

Au contraire, si le globe était absolument rigide, les marées océaniques, du moins les ondes lentes peu troublées par l'inertie ou la viscosité des eaux, offriraient, en moyenne, une amplitude égale à celle qu'indique la théorie élémentaire de ces marées ([77]).

En fait, les mouvements des mers, par rapport aux rivages, sont perceptibles; mais l'amplitude en est moindre que celle calculée pour un globe rigide.

C'est une preuve que le globe cède aussi, dans une certaine mesure, aux forces qui produisent les marées océaniques ; et le rapport des deux nombres en fournit une mesure.

Lord Kelvin a indiqué les résultats suivants, devenus désormais classiques ([78]).

En supposant que la Terre fût sphérique (de rayon égal à son rayon moyen), homogène (de densité égale à sa densité

([75]) Mém. cité à la note 71, spécialement pp. 575-578.

([76]) Comme Articles de vulgarisation, consultez Ch. Lallemand, Mouvements et déformations de la croûte terrestre (*Ann. Bur. Longit.*, Paris, *pour 1909*, notice B); Les marées de l'écorce et l'élasticité du globe terrestre (*Ibidem*, *pour 1910*, notice B); L'élasticité du globe terrestre et les marées de l'écorce (*Bull. astr.*, Paris, t. XXIX, 1911, pp 369-388); G.-H. Darwin, The Rigidity of the Earth (*Rivista di Scienza : Scientia*, Bologne, 3e année, t. V, 1909, pp. 230-240).

([77]) Voyez les Ouvrages cités à la note 74. Comme excellent article de vulgarisation, relatif aux trois premières méthodes, signalons aussi E. Pasquier, Sur les variations de la latitude et les déviations de la verticale (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 36e année, 1er fasc., octobre 1911).

([78]) *Natural Philosophy*, t. II, art. 842-843, pp. 439-440; *Mathematical and Physical Papers*, t. III, art. 45; *Popular Lectures...*, t. III, p. 238; Mémoire cité à la note 71, p. 574. Voyez aussi Lallemand, Article de 1910 cité à la note 76, pp. 4 et 59, etc.

moyenne), isotrope et incompressible, les marées océaniques à longues périodes seraient déjà réduites aux $^2/_3$ de leur amplitude théorique, si on attribuait au globe la rigidité très considérable de l'acier ($\mu = 7{,}7 \times 10^{11}$), et aux $^2/_5$, si on lui attribuait la rigidité trois fois moindre du verre ($\mu = 2{,}4 \times 10^{11}$). Il a montré [79], en se basant sur quelques mesures de marées lunaires à longues périodes, que la hauteur de ces marées n'atteint environ que les $^7/_{10}$ de sa valeur théorique, et a conclu que la rigidité du globe, pris dans son ensemble (*tidal effective rigidity*), n'est pas inférieure, avec les hypothèses prémentionnées, à celle de l'acier. Mais le nombre d'observations qu'il employait ne suffisait pas pour obtenir une conclusion certaine relativement au degré de rigidité « effective » de la Terre, puisque, comme on sait, des phénomènes météorologiques ne sont pas sans influence sur les marées à longues périodes.

La conclusion de Kelvin est à peu près confirmée, — au moins pour l'ordre de grandeur, — par les observations nombreuses et précises, de divers genres, qu'on a faites récemment. Mais si, il y a cinquante ans, elle semblait rigoureusement déduite, elle doit être considérée à l'heure actuelle plutôt comme le pressentiment d'une intuition géniale que comme le résultat d'une véritable démonstration [80].

Au fond la théorie de Kelvin repose sur les quatre hypothèses simplificatrices suivantes. Elle admet : 1° que les marées terrestres suivent une loi d'équilibre, c'est-à-dire que, dans leur calcul, on ne doit pas tenir compte de l'inertie; 2° qu'il en est de même pour les marées océaniques; 3° que la Terre peut être traitée comme un corps homogène et 4° qu'elle peut être traitée comme un corps incompressible [81].

---

[79] *Natural Philosophy*, t. II, art. 843-848, pp. 440-460, spécialement art. 848, p. 459 et G.-H. Darwin, A numerical Estimate of the Rigidity of the Earth (*Report of the 52d Meeting of the British Assoc. f. Adv. of Sc.*, Southampton, août 1882, A, n° 7, pp. 472-474), spécialement p. 474. Cf. Kelvin, Mém. cité à la note 71, §§ 17-20, pp. 577-578.

[80] G.-H. Darwin, Article cité à la note 76, spécialement p. 231.

[81] Love, Ouvrage cité à la note 24, ch. IV, § 55, p. 50.

1° D'une manière générale, nous pouvons admettre que la théorie de l'équilibre élastique est applicable aux marées terrestres, quel que soit le degré de rigidité du globe; car la période de l'oscillation naturelle d'une sphère fluide de mêmes dimensions et de même masse que la Terre est d'environ 1 heure 34 minutes ([82]); et si les substances composant le globe ont la rigidité de l'acier et que leur ensemble puisse être considéré comme homogène et incompressible, cette période est d'environ 1 heure 6 minutes ([83]). Or, ces périodes sont très courtes relativement à une période quelconque de marée; et il est très improbable que quelque constitution admissible de la Terre, autre que l'homogénéité isotrope, puisse exiger une période considérablement plus longue. Malgré cela, Love s'est donné la peine d'élaborer une théorie dynamique des marées terrestres ([84]) et a montré notamment l'insignifiance de l'effet gyroscopique dû à la rotation ([85]).

Un doute peut cependant subsister quant au point de savoir si oui ou non, on peut appliquer la « théorie d'équilibre » à un globe composé d'un noyau sphérique et d'une écorce solide séparés par une couche mince constituée par un magma fluide plus ou moins visqueux, tel que celui proposé par E. Wiechert ([86]) et admis par W. Schweydar ([87]); mais Love a combattu énergiquement ([88]) une telle hypothèse, en se basant sur

---

([82]) Mémoire de Kelvin cité à la note 7, § 58, p. 610 et celui cité à la note 71, § 3, p. 573.

([83]) Premier Mémoire de Lamb cité à la note 17, § 13, p. 212. Cf. H. Poincaré, Ouvrage et tome cités à la note 74, 5me partie, chap. XVIII, § 265, p. 445.

([84]) Ouvrage cité à la note 24, ch. V, pp. 58-74.

([85]) Voyez plus bas la note 144.

([86]) Cf. Ueber die Massenverteilung im Innern der Erde (*Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften*, Göttingen, Math.-naturw. Kl., 1897, 3e fasc., pp. 221 et suiv.).

([87]) Cf. Mémoire cité à la note 35, ch. IV, p. 77.

([88]) Cf. Mémoire cité à la note 39, § 20, p. 88; Ouvrage cité à la note 24, ch. IV, § 55, p. 51 et surtout § 63, p. 56.

les observations de O. Hecker ([89]), dont nous parlerons plus bas, et en montrant l'invraisemblance de ses conséquences.

2° Avant de discuter la légitimité de la deuxième hypothèse simplificatrice, disons que G.-H. Darwin a notablement augmenté la collection des données d'observations relatives aux marées dans les dernières éditions du *Treatise on Natural Philosophy* ([90]); mais c'est incontestablement Schweydar ([91]) qui a réuni le plus de matériaux.

Lord Kelvin avait proposé ([92]) de soumettre à l'observation la marée lunaire de quinzaine; d'après lui, c'était, avec la marée mensuelle, celle qu'il convenait d'employer pour déterminer la rigidité de la Terre; les ondes lentes étaient moins affectées par l'inertie et les effets de celles-ci devaient d'ailleurs être partiellement amortis par les îles et les continents formant obstacle au mouvement. Il se basait, pour cela, sur un argument de P.-S. de Laplace ([93]). Celui-ci avait développé des considérations tendant à prouver que les marées à longues périodes, telles que la marée de quinzaine, devaient, en conséquence du frottement des fluides, obéir assez exactement à la théorie d'équilibre. Il admettait, de plus, que cette théorie ne devait pas subir de modification, au cas où les mers ne recouvriraient pas entièrement le globe; mais, quant à ce dernier point, Kelvin ne partageait pas son avis. Airy et

---

([89]) Beobachtungen am Horizontalpendeln ... (*Veröffentlichungen des Kgl. Preusz. Geodät. Instit.*, Berlin, nouvelle série, 1907, n° 32, et 1911, n° 49).

([90]) Cambridge, t. II, 4e éd., 1903, § 848, *e*, pp. 453-460. Voyez aussi premier Mémoire de Darwin cité à la note 9, Appendice, pp. 31-35, et Articles du même auteur cités à la note 76, pp. 232-233 et à la note 79, pp. 472-474.

([91]) Mémoire cité à la note 35, ch. III, pp. 67-74.

([92]) Mémoire cité à la note 62, § 16, p. 577. Comparez G.-B Airy, Tides and Waves (*Encycl. Metropol.*, Londres, §§ 45, 54, 539, etc.); *Philos Magazine*, Londres, (4), t. L, 1875, pp. 277 et suiv.; W. Ferrel, *U. S Survey...*, 1873; *Philos Mag.*, Londres, (5), t. I, 1876, pp. 182 et suiv.; *Astron. Journ.* Boston, t. IX, 1889, pp. 41 et suiv., et t. X, 1890, pp. 121 et suiv.; *Smithson. Misc. Collection*, n° 843, etc.

([93]) *Mécanique céleste*, Paris, livres IV et XIII; *OEuvres complètes*, t. II. On sait que l'argument de Laplace relatif au frottement n'est valable que

Ferrel (94) avaient contesté la légitimité de la conclusion de Laplace relative à la théorie d'équilibre; Kelvin et Darwin l'ont d'abord défendue (95). Mais, un peu plus tard, Darwin s'est mis à douter de la rigueur du raisonnement par lequel Laplace croyait avoir prouvé que les marées à longues périodes devaient obéir approximativement à la loi d'équilibre. En étudiant le problème des marées lentes au point de vue « dynamique », sur un globe entièrement recouvert par les eaux, il a trouvé (96) qu'elles pouvaient différer considérablement en hauteur de celles qui obéiraient à la théorie statique. Ceci semblait donc laisser planer un doute sur la conclusion d'après laquelle la Terre devait être aussi rigide que l'acier, tout en confirmant l'idée que le degré de rigidité de la Terre, dans son ensemble, devait être très élevé (97).

Mais, plus tard, Lord Rayleigh a fait voir (98) que les

---

pour l'onde de marée qui a pour période 18 ans $^2/_3$ (*Saros*). Cf. Poincaré, Ouvrage et tome cités à la note 74, 1re partie, chap. VIII, pp. 182-204; S.-S. Hough, *Proceedings of the Mathematical Society*, Londres, t. XXVIII, décembre 1896; *Phil. Trans*, A, t. CLXXXIX, 1897, pp. 139 et suiv.; et t. CXCI, 1898, pp. 201 et suiv.; Article cité à la note 74, nos 12-13, pp. 17-21.

(94) Cf. Memoires cités à la note 92.

(95) Cf. Kelvin, *Philos. Mag.*, Londres, (4), t. L, 1875, pp. 227, 279, 388; Darwin, art. *Tide* dans la 9e éd. (t. XXIII, 1880) de l'*Encycl. Britannica*, Londres, p. 360.

(96) La présence des continents oblige déjà à modifier les résultats de la théorie statique. Cf. Kelvin, *Nat. Phil.*, t. II, § 848, *c*, pp. 447-451; Poincaré, *Journal de math. pures et appl.* (Liouville), (5), t. II, 1896, pp. 7 et suiv.; Ouvrage et tome cités à la note 74, *passim*; Lévy, Ouvrage cité à la note 74, chap. I, §§ 10-11, pp. 13-16; Brill, Mémoire cité à la note 44, § 7, pp. 42-43; Darwin et Hough, Article cité à la note 74, no 6, pp. 12-13; Darwin, On the Correction to the Equilibrium Theory of Tides for the Continents (*Proc. Roy. Soc.*, Londres, t. XL, 1886, pp. 303-315) (en collab. avec H. H. Turner); *Scientific Papers*, t. I, pp. 361 et suiv. Voyez aussi Harris, *Manual of Tides*, 2e partie, Londres, 1897.

(97) La théorie dynamique de Darwin était basée sur l'hypothèse que le déplacement de l'océan n'est fonction que de la latitude, ou, en d'autres termes, que les marées pouvaient être calculées comme s'il n'existait pas des continents formant obstacle aux ondes de marée.

(98) Note on the Theory of the Fortnightly Tide (*Philos. Magazine*, Londres, (6), t. V, 1903, pp. 136-141).

barrières solides que constituent, pour les mers, les bandes continentales, que Darwin avait négligé de considérer dans son étude, devaient avoir pour effet d'empêcher la formation de certains courants se produisant suivant les parallèles et ayant pour conséquence d'amener l'écart signalé par Darwin entre la théorie dynamique et la théorie statique. Il paraît dès lors qu'on peut admettre, avec une approximation suffisante pour la détermination en question, que la marée de quinzaine obéit à la loi de l'équilibre [99].

3° Le fait que la Terre ne peut, en réalité, être homogène, provoque la question : Comment, dans quel sens et de combien une hétérogénéité bien déterminée obligera-t-elle à modifier les conclusions de la théorie de l'équilibre élastique d'un globe homogène?

Cette question a été résolue, pour la première fois, par Darwin [100], qui adoptait, pour la répartition des densités à l'intérieur du globe, une loi plus ou moins plausible et qui concluait que, avec une telle loi (suivant laquelle d'ailleurs la densité augmentait de la surface vers le centre), la Terre devait, dans son ensemble, céder un peu moins (environ 3 %) aux forces perturbatrices que si elle était homogène; il conservait toujours l'hypothèse de l'isotropie en chaque point, celle de l' « homogénéité élastique » d'un point à un autre et celle de l'incompressibilité.

La question a été, depuis, reprise par Herglotz [101], qui l'a

---

[99] Pour tout ce qui concerne cette question, consultez, outre les Ouvrages renseignés à la note 74 (spécialement celui de H. Poincaré, 1re partie, chap. VIII, pp. 162-204 et 5me partie, chap. XVIII, pp. 431-450), l'excellent Article de G.-H. Darwin et S.-S. Hough cité à la note 74 et une Note de E. Fichot, Sur la production des marées statiques... (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. CLV, janvier 1913, pp. 211-213).

[100] Mémoire cité à la note 31. Cette diminution de 3 % concerne le self-potentiel du globe déformé.

[101] Mémoire cité à la note 32. Il semble bien que Herglotz fait une confusion concernant les coefficients h, k dont il sera question plus loin). Comparez note 264. — On peut aussi considérer Rudzki comme un prédécesseur de Herglotz [cf. A. Brill, Mémoire cité à la note 44, Introduction, pp. 2-3].

traitée magistralement dans une analyse profonde; il admettait, pour loi des densités, celle de Roche ([102]), et il a conclu que la réduction de 3 ‰, indiquée par Darwin, devait être portée, dans ces conditions et avec la rigidité de l'acier, à 20 ‰. On peut cependant lui reprocher ([103]) d'avoir supposé la substance absolument incompressible, ce qui d'abord est contraire aux faits et de plus enlève une grande part de vraisemblance à la loi de Roche.

Depuis Darwin, Schweydar a réuni ([104]) une énorme quantité de mesures de marées océaniques lunaires et a réduit les observations de ces marées lunaires à longues périodes (mensuelle et de quinzaine) d'un grand nombre de ports répartis sur la surface du globe tout entière, pour 194 années d'observation. Il a essayé de concilier les résultats de ces mesures avec la théorie de Wiechert relative à la constitution de globe ([105]) et y est bien parvenu. Il a trouvé que les marées atteignent une hauteur comprise entre les 0,60 et les 0,62 de leur hauteur théorique, alors que Darwin avait indiqué auparavant 0,67. Mais, de l'avis même de ce dernier ([106]), le poids à attribuer aux conclusions de Schweydar est, naturellement, beaucoup plus élevé que celui qu'on peut attribuer à celles de Darwin lui-même, conclusions qui se basent sur des données d'observations beaucoup moins nombreuses.

Les résultats un peu exagérés que Schweydar a obtenus, relativement à la rigidité respective du noyau et de l'écorce terrestres, l'ont amené à croire que l'anomalie pouvait être expliquée par l'existence d'une couche plus ou moins fluide, intermédiaire entre le noyau et l'écorce; mais, comme nous

---

([102]) Mémoire cité à la note 53.

([103]) Cf. H. Janne, Extension de la Théorie de Laplace due à Herglotz (*Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, 37e année, 1er fasc., janvier 1913, pp. 118-152); et le Rapport que P. Duhem a présenté sur ce Travail (*Ibidem*, Comptes rendus des séances, pp. 65-66).

([104]) Mémoire cité à la note 35, chap. III.

([105]) Mémoire cité à la note 86.

([106]) Cf. Article cité à la note 76, pp. 233-234.

l'avons dit ci-dessus ([107]), cette hypothèse ne peut supporter un examen approfondi.

4° On peut également faire une recherche analogue sur l'influence que peut avoir, sur les conclusions générales, un certain degré de compressibilité. Kelvin, Darwin, Hough, Rudzki, Herglotz, Schweydar, Brill ([108]) ont tous supposé qu'on pouvait considérer les substances composant le globe comme incompressibles; ils se plaçaient dans cette hypothèse non seulement parce que cette dernière rendait le problème plus abordable à l'analyse ([109]), mais encore parce qu'une remarque, un peu concise et assez hâtive de Kelvin ([110]) semblait leur donner raison; et que d'ailleurs, si l'on écartait cette hypothèse, on pouvait se demander à juste titre si, aux parties centrales du globe (où doivent régner des pressions énormes), les limites d'élasticité ne sont pas dépassées et si, dès lors, on était encore en droit de leur appliquer la loi de Hooke, sur laquelle sont basées les équations ordinaires de la théorie de l'élasticité ([111]).

Mais Love, après avoir partagé, pendant quelque temps, leur opinion relativement à l'insignifiance de l'influence que pouvait avoir, sur la hauteur des marées, un certain degré de compressibilité ([112]), a eu des doutes ([113]), a fini par

---

([107]) Cf. IV, 1°, notes 88 et 89; H. Poincaré, Note sur la XVI[e] Conférence de l'Association géodésique internationale (*Ann. Bur. Longit.*, Paris, *pour 1911*, pp. 11-12); É. Pasquier, Mémoire cité à la note 77, chap. II, § 5, p. 82. Il est juste de dire que, dans un de ses derniers Mémoires (premier Mémoire cité à la note 41, chap. II-III, pp. 15-31, spécialement p. 31), Schweydar a démontré la non-légitimité d'une pareille hypothèse.

([108]) Mémoires cités aux notes 7, 8, 9, 31, 33, 34, 32, 35, 44. Voyez cependant Darwin, Mémoire cité à la note 11, § 10, pp. 215-218.

([109]) Cf. Love, Mémoire cité à la note 39, § 15, p. 83.

([110]) *Natural Philosophy*, t. II, art. 837-838, pp. 434-435.

([111]) Cf. *Encykl. d. m. Wiss.*, Art. cité à la note 99, n° 37, pp. 61-62; Love, Ouvrage cité à la note 9, chap. XI, art. 181, pp. 248-250, et aussi chap. III, art. 75, pp. 107-109; Janne, Mémoire cité à la note 103, art. IV, pp. 126-127.

([112]) Premier Mémoire cité à la note 30, Introduction, pp. 107-108 et §§ 9-12, pp. 115-118.

([113]) Mémoire cité à la note 39, § 14, p. 82 (troisième note).

la prendre en considération (114) et a prouvé (115) que la compressibilité tend à augmenter la valeur du rapport de l'amplitude de la marée effective à celle de la marée théorique.

Entretemps Jeans (116) et Rayleigh (117) ont émis des opinions très intéressantes sur l'influence que pouvait avoir la compressibilité sur la stabilité de l'équilibre élastique d'un globe dont les molécules sont douées d'attraction ; le premier a fait notamment remarquer qu'une disposition sphérique et concentrique des couches d'égales densité, dans le globe, cesse d'être stable dès que le degré de compressibilité de la substance dépasse une certaine valeur (118) ; le second a montré l'importance de la considération de la « tension initiale » due à la self-attraction (119).

On peut résumer qualitativement les conclusions de Love relatives à l'hétérogénéité et à la compressibilité en disant (120) : une évaluation de la rigidité du globe, faite avec l'hypothèse de l'homogénéité, est trop grande, tandis que celle faite avec l'hypothèse de l'incompressibilité est trop petite (121).

Voyons ce que peuvent nous donner les mesures de marées.

Admettons que le globe soit primitivement sphérique, de rayon a, composé de couches sphériques concentriques, indéfiniment minces, qui en sont les surfaces d'égale densité ρ ;

---

(114) Ouvrage cité à la note 24, chap. VIII ; voyez aussi Mémoire cité à la note 38.

(115) *Ibidem*, art. 127, p. 110.

(116) Second Mémoire cité à la note 36.

(117) Mémoire cité à la note 37.

(118) Second Mémoire cité à la note 36, § 34, pp. 178-179.

(119) Mémoire cité à la note 37, pp. 486-489. Comparez Love, Mémoire cité à la note 36, §§ 1-3, pp. 171-176 ; Ouvrage cité à la note 9, chap. III, art. 75, pp. 107-109, et chap. XI, art. 181, pp. 248-250 ; Ouvrage cité à la note 24, chap II, art. 16-19, pp. 12-14, et chap. VII, art. 102-103, pp. 89-90.

(120) Ouvrage cité à la note 24, art. 127, p. 110.

(121) Une bonne analyse des Travaux cités a paru dans le « Report of the Council to the 19th Annual General Meeting » (*Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, Londres, t. LXX, n° 4, février 1910) ; spécialement l'Article *Geodynamics and the Figure of the Earth* (pp. 382-388) par E.-H. Hills.

et, d'une façon plus générale, que le globe possède la *symétrie sphérique*, c'est-à-dire que les constantes physiques soient les mêmes en tout point de chaque couche élémentaire.

Prenons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ayant leur origine au centre de figure O du globe.

En un point M (x, y, z), la densité est seulement fonction de r, par hypothèse,

$$\rho = f(r), \tag{1}$$

où $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ est la distance radiale OM. On admet souvent, pour simplifier l'analyse, 1° que la constitution de la substance est la même en tous les points relativement à la résistance élastique qu'elle offre aux déformations [homogénéité élastique ([122])]; 2° qu'en chaque point, cette constitution est la même dans toutes les directions (isotropie) : bien que ces hypothèses ne soient vraisemblablement pas admissibles, grâce à la différence qui peut exister entre les densités en deux points distincts ([123]). Mais ceci n'est *nullement indispensable* pour ce qui suit.

Nous supposerons d'ailleurs qu'une « théorie d'équilibre » soit applicable au globe.

Désignons par u, v, w les composantes du déplacement MM′ du point M (x, y, z) suivant les trois axes rectangulaires. Alors si $q = ux + vy + wz$, la composante *radiale* du déplacement MM′ est

$$\mathrm{U} = r^{-1}q, \tag{2}$$

et la *dilatation cubique*

$$\Delta = \operatorname{div}(u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3}$$

([122]) Que nous nommons ailleurs *symétrie*. [Cf. Mémoire cité à la note 103, art. II, p. 124, note 2.] Cette appellation a été critiquée par P. Duhem. Voyez encore § VII.

([123]) On fait ces hypothèses pour pouvoir « avancer ». [Cf. Love, Ouvrage cité à la note 24, chap. VII ; spécialement art. 106, p. 92.]

La densité en M (x, y, z), après une déformation du globe due à l'ensemble des déplacements des points, est [124]

$$\rho' = \rho - U\frac{d\rho}{dr} - \rho\Delta. \tag{4}$$

Supposons que les forces « de volume », qui agissent sur les diverses masses élémentaires constituant le globe, en produisant la déformation de ce dernier, admettent un potentiel W, satisfaisant à l'équation $\nabla^2 W = 0$ en tout point pour lequel $0 < r \leq a$: ∇^2 représente l'opérateur laplacien

$$\text{div. grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

D'après un théorème connu [125], W est développable en série d'harmoniques sphériques solides W_n de degrés n réels, entiers et positifs

$$W = \Sigma W_n. \tag{5}$$

Quelle que soit la loi que l'on adopte pour la constitution du globe, pourvu que les hypothèses prémentionnées soient respectées; les grandeurs U et Δ seront exprimables par des séries telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \Sigma H_n(r).\, W_n, \\ \Delta = \Sigma f_n(r).\, W_n, \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} (6) \\ (7) \end{array}$$

où W_n est l'harmonique solide du degré n figurant dans (5) et

---

[124] Cf. Love, Mémoire cité à la note 39, § 3, p. 75 [form. (4)]; Jeans, Second Mémoire cité à la note 36, § 6, p. 160; Rayleigh, Mémoire cité à la note 37, p. 490; Love, Mémoire cité à la note 38, § 3, p. 175 (form. [7]) et surtout Ouvrage cité à la note 24, art. 106, p. 91.

[125] Voyez, par exemple, Kelvin, Mémoire cité à la note 7, § 7, pp. 584-585; *Natural Philosophy*, t. II, chap. I, App. B. *h*. pp. 181-182; H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, Paris, 1899, art. 93-96, pp. 204-211, etc.

$H_n(r)$, $f_n(r)$ sont des fonctions de r seulement, convenablement choisies (126).

D'autre part, d'après (4), si V désigne la valeur en M du potentiel attractif du globe avant la déformation, le potentiel attractif V′ du globe après la déformation sera la somme : 1° de V; 2° du potentiel dû à une distribution de volume, de densité cubique $-U\frac{d\rho}{dr} - \rho\Delta$, dans la région $0 < r \leq a$; 3° du potentiel dû à une distribution superficielle, de densité $[\rho U]_{r=a}$, sur la sphère $r = a$ (127). Ainsi le potentiel V′ différera de V par des termes qui seront les produits des harmoniques solides W_n par des fonctions K_n de r :

$$V' = V + \Sigma K_n(r).\, W_n. \tag{8}$$

Dans les cas les plus importants au point de vue de la théorie des marées (réaction centrifuge, attraction émanant d'un astre éloigné, etc.), la série ΣW_n se réduit à un seul terme [harmonique solide zonale du second degré].

Par exemple, négligeons la rotation et ne considérons que l'effet attractif dû à la Lune. Alors le potentiel de la force qui produit les marées est, en M (128),

$$W = W_2 = \frac{fM}{R^3} r^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \tag{9}$$

où θ est l'angle que fait OM avec la droite qui joint le centre O de la Terre au centre L de la Lune, R la distance OL, M la

---

(126) Cf. Love, Ouvrage cité à la note 24, chap. IV, art. 59, pp. 52-54; Mémoire cité à la note 39, § 4, pp. 75-76.

(127) Ibidem et Jeans, Second Mémoire cité à la note 36, § 6, p. 160 (y compris la note de cette page).

(128) Ibidem et *Natural Philosophy*, t. II, art. 834, p. 432; Article de l'*Encykl. d. m. Wiss.* cité à la note 99, B, n° 2; etc.

masse de la Lune et f la constante d'attraction. Les séries (6), (7) se réduisent aussi à un seul terme, et nous écrivons

$$\left\{ \begin{array}{l} U = H(r).\dfrac{W_2}{g}, \\ \Delta = f(r).\dfrac{W_2}{g}, \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} (10) \\ (11) \end{array}$$

où g, constante qui n'est introduite que pour faciliter les comparaisons, désigne l'intensité de l'attraction du globe non déformé en un point de sa surface.

Si nous supposons, pour un instant, que le globe soit recouvert d'une masse fluide d'épaisseur infiniment petite (dont on puisse négliger l'inertie, l'attraction par le globe et la self-attraction de ses parties, etc.), et que, au contraire, le globe lui-même soit parfaitement rigide, la hauteur de la marée fluide sera [129]

$$H = \frac{W_2}{g} \text{ pour } r = a, \qquad (12)$$

ce qui est le déplacement radial donné par (10) pour $r = a$ et $H(a) = 1$. Posons $h \equiv H(a)$; h mesure alors le rapport de la marée du globe élastique à la hauteur d'équilibre, et l'équation de la surface extérieure est, après la déformation,

$$r = a + h\frac{\overline{W}_2}{g}, \qquad (13)$$

où $\overline{W}_2$ est la valeur de W_2 pour $r = a$.

([129]) Cf. Article de l'*Encykl. d. m. Wiss.* cité à la note 90, B, n° 3, pp. 9-10; Lévy, Ouvrage cité à la note 74, chap. I, n° 3, pp. 3-5; etc. Pour les corrections dues à la self-attraction, à l'existence des continents, consultez le même article de l'*Encyklopädie*, n^{os} 5-9. Voyez aussi les Ouvrages et Mémoires cités à la note 96.

D'après (8), V′ aura pour valeur, dans le cas particulier considéré,

$$V' = V + K(r).\, W_2, \tag{14}$$

ce qui devient, en un point de la surface $r = a$,

$$V'(a) = V(a) + K(a).\, \overline{W}_2. \tag{15}$$

On trouve, après quelques calculs (130), en désignant K (a) par k,

$$k \equiv K(a) = \frac{3}{5}\frac{1}{\rho_m a^6}\int_0^a \rho \left\{ \frac{d}{dr}[r^6.\, H(r)] - r^6.\, f(r) \right\} dr, \tag{16}$$

où ρ_m désigne la densité moyenne du globe.

Alors le potentiel du globe déformé sera, en un point de la sphère $r = a$,

$$V'(a) = V(a) + k\overline{W}_2; \tag{17}$$

on peut dire que h et k mesurent respectivement la hauteur de la marée du globe et la variation du self-potentiel, et on peut appeler h le *coefficient de hauteur* et k le *coefficient de potentiel*. Il est clair que h et k sont des nombres abstraits.

Cherchons maintenant quel est, en fonction de h et k, le coefficient de réduction de la marée d'un océan (doué des propriétés idéales énoncées plus haut), infiniment mince, répandu à la surface du globe élastique : la surface libre de cet océan sera une surface équipotentielle, dont l'équation sera

$$r' = a + \frac{(1 + k)\overline{W}_2}{g}, \tag{18}$$

---

(130) Voyez, par exemple, Herglotz, Mémoire cité à la note 32, chap. I, p. 279, form. (10); Love, Mémoire cité à la note 39, § 3, p. 76, form. (6); Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction, § 4, pp. 14-15.

tandis que l'équation de la surface externe du noyau sera

$$r = a + h\frac{\overline{W}_2}{g}. \tag{13}$$

La hauteur, comptée suivant la direction radiale, de la marée océanique apparente sera

$$H' = r' - r = (1 + k - h)\frac{\overline{W}_2}{g} \tag{19}$$

Comparant à (12), nous obtenons

$$\frac{H'}{H} = \frac{1 + k - h}{1}. \tag{20}$$

D'après ce que nous avons dit plus haut ([131]), les mesures les plus précises des marées océaniques, lunaires, à longues périodes, ont donné

$$\frac{H'}{H} = \frac{2}{3}, \text{ très sensiblement,}$$

en sorte que nous avons

$$1 + k - h = \frac{2}{3}, \tag{21}$$

d'où

$$h - k = \frac{1}{3}. \tag{A}$$

Cette valeur expérimentale est indépendante de toute hypothèse particulière sur la constitution du globe, autre que les postulats mentionnés.

Nous verrons plus loin ce qu'une telle valeur peut nous apprendre relativement aux constantes élastiques du globe.

([131]) Cf. W. Schweydar, Mémoire cité à la note 35, chap. III; A.-E.-H. Love, Mémoire et extrait cités à la note 39; Ouvrage cité à la note 24, chap. IV, art. 59, pp. 53-54; E. H. Hills, Rapport cité à la note 121; Ch. Lallemand, deux derniers Articles cités à la note 76.

V.

Deuxième méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des déviations de la verticale.

Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, un fil à plomb placé en un lieu géographique doit, en vertu même de la déformation élastique, sous l'action des forces perturbatrices, de la masse attractive de la Terre et du changement de position, relative à cette Terre, des astres perturbateurs (principalement Lune et Soleil), subir une déviation propre, vis-à-vis d'axes tournant avec la Terre; en même temps que le plan tangent au sphéroïde terrestre, au lieu considéré (qui est le plan de référence pour les déplacements du fil à plomb), doit éprouver un changement d'orientation ([132]).

Pour ce double motif, le fil a plomb doit, vis-à-vis de ce plan, changer de position; et comme sa direction définit la verticale du lieu, on dit qu'il se produit une déviation de la verticale. La mesure de la déviation de la verticale constitue un deuxième moyen de déterminer la rigidité du globe.

Disons de suite que des actions étrangères à la déformation élastique globale, telles que celle des protubérances des marées océaniques peuvent aussi produire des déviations de la verticale ([133]) : ainsi dans l'exemple cité, le flux, arrivant à un

---

([132]) Cf. F. Klein et A. Sommerfeld, *Ueber die Theorie des Kreisels*, Leipzig, 3e fasc., 1903, chap. VIII, B, § 7, pp. 705-706; M. Stapfer, Le mouvement de rotation de la Terre d'après MM. Klein et Sommerfeld (*Ann. Observat.*, Bordeaux, t. XIV, 1912, chap. V, § 2, *d*, p. 50); H. Janne, Mémoire cité à la note 3, 2e partie, § 4, pp. 115-116; etc.

([133]) Cf. A. d'Abbadie, *Ann. Soc. Sc.*, Bruxelles, t. V, 2e fasc., 1881, pp. 37 et suiv.; G.-H. Darwin, *Rep. 52th Meet. Brit. Assoc. f. Adv. of Sc.*, Southampton, 1882, pp. 95-106 et 106-109; *Phil. Mag.*, Londres, (5), t. XIV, 1882, et t. XXIX, 1897; Kelvin, *Natural Philosophy*, t. II, art. 818, pp. 389-391; F. Omori, *Publ. Earthquake Invest. Comm.*, Tokyo, 1905, n° 21, pp. 5 et suiv.; *Bull. Intern. Earthq. Invest. Comm.*, 1907, pp. 167 et suiv.; E. Paschwitz, *Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. II, 1895, pp. 332 et suiv.; Ch. Lallemand, Premier Article cité à la note 67, p. 30; O. Hecker,

port où est installé un fil à plomb, exerce une attraction sur ce dernier, en même temps qu'il cause un affaissement, local et temporaire, de l'écorce terrestre.

On a aussi à se garder, au moins si l'on se sert de pendules rigides, d'une influence thermique diurne, due au rayonnement solaire, qui masque, lorsqu'on n'a pas soin de l'éliminer par des moyens judicieux, celle, beaucoup plus faible, due à l'attraction du Soleil (154); de plus, les courants d'air, l'humidité qui gonfle le sol, les mouvements des fondations et des piliers qui soutiennent l'appareil ou son plan de repère peuvent fausser les résultats (155).

Dès 1832 on s'est préoccupé de la mesure des déviations de la verticale; mais les conclusions des recherches ont été plutôt négatives, à cause de la petitesse de ces déviations, tant qu'on s'est servi du fil à plomb et jusqu'au moment auquel von Rebeur-Paschwitz a inventé, ou plutôt remis au jour, le pendule horizontal, qui permet d'amplifier presque indéfiniment ces déviations (156).

Mémoires cités à la note 89; E. Mazelle, *Mitteilungen der Erdbebenkommission der Akad. der Wiss.*, Vienne, t. XIX, 1900; W. Schweydar, Mémoires cités à la note 41; *Comptes rendus des séances de la XVII^e Conférence de l'Assoc. géodés. intern.*, 1^er vol., Berlin, 1913, p. 53; Shida, Mémoire cité à la note 45.

(154) Cf. R. Ehlert, *Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. III, 1896, pp. 131 et suiv.; G. H. Darwin, Article cité à la note 76, p. 235; Ch. Lallemand, Premier Article cité à la note 76, p. 18; etc.

(155) Voyez les études de Henry, Ellis, Förster, etc. sur ce sujet. [Cf. F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, chap. XXX, § 222, p. 547.]

(156) Voici quelques Travaux relatifs aux déviations de la verticale :

J. Gruithuisen, *Neue Analekten*, Münich, 1832, t. I, 1^re partie; L. Hengler, *Polytechn. Journal* (Dingler), Stuttgart, 1832, t. XLIII, pp. 81 et suiv., C.-A.-F. Peters, *Bull. Ac. Sc.*, Saint-Pétersbourg, t. III, 1844; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1845, n° 507; A. Perrot, *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. LV, 1862, pp. 728 et suiv.; F. Zöllner, *Ann. Phys. Chem.*, t. CL, 1873, pp. 131, 134, 140; *Verh. d. Sächs. Gesell. d. Wiss.*, Leipzig, t. XXI, 1869, p. 281; t. XXIII, 1871, p. 479; t. XXIV, 1872, p. 183; A. Safarik, *Böhm. Gesell.*, 1872; *Ann. Phys. Chem.*, t. CL, 1873, p. 150; A. d'Abbadie, *Assoc. fr.....*, Bordeaux, 1872; Mémoire cité à la note 133; G. et H. Darwin, *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sc.*, 1881, p. 93; 1882, pp. 95 et 106; G.-H. Darwin, *Scientific Papers*, t. I, p. 389; C. Wolf, *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. XCVII, 1883;

Après lui, Ehlert, Kortazzi et surtout Schweydar, Hecker, Meissner, Orloff et Shida ([137]) ont obtenu, au moyen du pendule horizontal, des résultats excessivement importants. W. Schweydar a fait la réduction des observations de Paschwitz et d'Ehlert à Strasbourg, de Kortazzi à Nicolajew et de ses propres observations à Heidelberg ([138]); ses résultats ([139]) indiquaient que les déviations de la verticale sont, en amplitude, environ les deux tiers de ce qu'elles seraient sur un globe rigide et confirmaient la conclusion tirée de la mesure des hauteurs des marées, puisque, comme nous le verrons plus loin, le coefficient de réduction des déviations de la verticale est le même que celui des marées.

Finalement, entre les mains habiles de O. Hecker ([140]), le

Gaillot, *Bull. astr.*, Paris, t. I, 1883, pp. 50, 113, 217; Bouquet de la Grye, *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. XCIX, 1884; J.-G. Hagen, *Astr. Nachr.*, Kiel, t. CVII, 1884, n° 2568; von Rebeur-Paschwitz, *Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. II, 1895, pp. 16, 211, 332; *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sc.*, 1893, pp. 309 et suiv.; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1889, n° 2874; *Bull. astr.*, Paris, t. IV, 1887, p. 541, et t. VI, 1889, p. 183; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1900, n^{os} 3001-3002; R. Ehlert, Mémoire cité à la note 134; J.-T. Kortazzi, *Investia Russk. Astr. Obshchestva*, t. IV, 1895, p. 24, et t. V, 1896, p. 301; F. Omori, Rapports cités à la note 133; W. Schweydar, *Beiträge sur Geoph.*, t. VII, 1905, et Mémoire cité à la note 35; O. Hecker, Mémoires cités à la note 89; W. Schweydar, *Geographische Mitteilungen* (Petermann), août 1911, pp. 74-75; Orloff, *Astr. Nachr.*, Kiel, 1910, n° 4446; *Bull. Ac. Sc.*, Saint-Pétersbourg, 1910, pp. 775 et suiv.; M. Haid, *Comptes rendus de la XVII^{e} Conf. Ass. géodés. intern.*, Berlin, 1913, Annexe A. X*b*; G.-H. Darwin, Article cité à la note 77, pp. 234-239; Ch. Lallemand, Premier Article cité à la note 76; E. Pasquier, Mémoire cité à la note 77, p. 10 et 74-78; F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, pp. 544-547; A. E. H. Love, Mémoire cité à la note 39; E. H. Hills, Rapport cité à la note 121; etc.; les six derniers Mémoires mentionnés donnent d'excellentes analyses des Travaux précédents. Voyez aussi l'Article de l'*Encykl. d. math. Wiss.*, cité à la note 90, n° 21, et surtout W. Schweydar, Mémoires cités aux notes 138, 35 et 41; T. Shida, Mémoire cité à la note 45.

([137]) Voyez leurs Mémoires cités à la note précédente.

([138]) W. Schweydar, Untersuchung der Oszillationen der Lotlinie... [*Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. VII, 1905.]

([139]) Mémoire cité à la note 35, chap. II.

([140]) Mémoires cités à la note 89. Voyez aussi Darwin, Article cité à la note 76; Lallemand, Articles cités à la note 76; etc.

problème a reçu une solution analogue, mais plus complète, méritant peut-être encore plus de confiance et dont l'exactitude ne semble pas prêter au doute ; la réduction de ses observations indique encore qu'en fait les déviations du pendule sont à peu près les deux tiers de ce qu'elles seraient sur une terre rigide. La courbe traduisant ces déviations a deux boucles ; elle montre, chose très curieuse, que le rapport de réduction n'est pas le même dans les directions N.-S. et E.-W. : il est plus faible dans le sens du méridien (c'est-à-dire que la réduction est plus forte dans ce sens) que dans le sens perpendiculaire et que les déviations, dans ces sens respectifs, sont, entre elles, en moyenne, dans le rapport de 4 à 6 (141). Au reste, les déviations sont toujours très sensiblement en coïncidence de phase avec les forces perturbatrices : ceci semble montrer d'une façon décisive qu'il est légitime d'appliquer *in fine* la théorie d'équilibre et que, en conséquence, l'existence d'une couche plastique, inférieure à l'écorce, est très improbable. Lallemand a cru voir dans l'anomalie du rapport de réduction des amplitudes (142) une preuve de la conformation tétraédrique du globe.

Pour Darwin (143), cela résulterait d'une différence entre les propriétés élastiques de l'écorce dans ces deux directions, et cette différence elle-même pourrait, du moins en partie, trouver sa cause dans un phénomène de « rigidité gyroscopique » ; il a rappelé à cette occasion les intéressantes recherches de Kelvin sur les coefficients d'élasticité des corps

---

(141) Orloff trouve un rapport plus faible.

(142) Premier Article cité à la note 76, p. 34. Relativement au point précédent, il semble cependant, d'après les dernières recherches de Schweydar [Premier Mémoire cité à la note 41, Introduction, p. 1 et ch. I, pp. 12 et 15 ; *Comptes rendus de la XVII^e Conf. Ass. géodés. intern.*, 1^er vol., Berlin, 1913, p. 53], qu'il soit nécessaire de tenir compte des différences de phase. Enfin, relativement à l'existence peu probable d'une couche plastique intermédiaire (entre l'écorce et le noyau rigides), voyez encore Shida, Mémoire cité à la note 45, 1^re partie, § 7, p. 114.

(143) *Comptes rendus des séances de la XVI^e Conférence de l'Association géodésique internationale*, 1^er vol., Berlin, 1910, pp. 36-37.

en rotation. Mais il a déclaré lui-même qu'il ne savait si ce phénomène pourrait rendre compte, quantitativement, de la différence, relativement grande, que l'on observe entre les constantes élastiques de l'écorce, suivant les deux directions perpendiculaires. Depuis lors, Love (144) a étudié analytiquement les conséquences de cette hypothèse et a conclu que l'effet de la rotation est de produire effectivement un aplatissement de la couche des déviations dans le sens observé, mais que la force relative additionnelle, qui cause cet aplatissement, est, pour un globe d'acier, d'un ordre de grandeur beaucoup trop petit pour qu'on puisse constater expérimentalement ses effets.

Darwin (145) a remarqué de plus que l'une des deux boucles de la courbe est déplacée vers l'est et l'autre vers l'ouest. Hecker (146) a pensé que cela pouvait encore être dû à une différence d'élasticité entre les directions rayonnant du lieu considéré, et Darwin a fait remarquer que cette explication est probablement valable pour Potsdam, lieu des observations de Hecker, qui n'est pas très éloigné du bord occidental du grand continent Europe-Asie. Hecker (147) et Darwin (148) ont aussi tenté une explication analogue de la première anomalie.

Schweydar (149) a critiqué d'ailleurs ce genre d'explications, basées sur l'influence de certaines circonstances locales; il attribue (150) plutôt l'aplatissement de la courbe à une flexion de la croûte produite par les protubérances des marées océaniques.

---

(144) Cf. Ouvrage cité à la note 24, chap. V, spécialement art. 81, p. 74, et aussi chap. IV, art. 64, pp. 56-57.

(145) Article cité à la note 76, p. 238.

(146) Cité par DARWIN dans l'Article mentionné à la note précédente.

(147) Cité par LOVE, Ouvrage indiqué à la note 24, chap. IV, art. 64, p. 57.

(148) Article cité à la note 76, p. 237.

(149) Ueber die Deformation des Erdkörpers [*Geographische Mitteilungen* (PETERMANN), Gotha, 57e année, août 1911, pp. 74-75]; spécialement p. 75, 2e colonne, et *Untersuchungen*... (Mémoire cité à la note 41), chap. IV, pp. 32-36.

(150) *Untersuchungen*... (Mémoire cité à la note 41), chap. I, p. 12. Sur une influence secondaire des marées océaniques, voyez encore SHIDA, Mémoire cité à la note 45, 1re partie, §§ 7-8, pp. 92-117.

Reprenant les considérations analytiques précédentes, dues à Love, nous allons voir que la déformation élastique du globe sous l'influence des forces perturbatrices réduit les déviations de la verticale (telles qu'elles se produiraient sur un globe parfaitement rigide) dans le même rapport $\frac{1+k-h}{1}$ que celui dans lequel elle réduisait la hauteur des marées océaniques ([151]), au moins si nous admettons que les déviations, très petites, du pendule sont proportionnelles aux forces qui les produisent.

Négligeons encore la réaction centrifuge due à la rotation de la Terre et l'action attractive du Soleil.

Si nous nous servons d'un pendule horizontal, l'écart entre la position instantanée et la moyenne d'équilibre est proportionnel à la composante, suivant une normale à l'axe de l'instrument, de la résultante des forces perturbatrices.

Puisque les forces perturbatrices, agissant en un lieu géographique M, sont toutes dirigées dans le plan MOL contenant le lieu M, le centre O de la Terre et le centre L de la Lune et que nous supposons que l'axe vertical du pendule reste constamment normal, en M, à la surface du globe, la composante en question sera évidemment celle mesurée suivant la tangente, en M, au méridien elliptique du globe compris dans le plan MOL.

Il nous suffit donc, pour notre objet, de déterminer cette composante.

Les trois forces perturbatrices dont nous devons déterminer la composante suivant la tangente au méridien sont : 1° la force attractive de la Lune, de potentiel W_2; 2° la force attractive additionnelle due à la déformation de la Terre (sous l'influence de la Lune), de potentiel $k\,W_2$; 3° la force attractive de la Terre, supposée non déformée, de potentiel V ([152]).

([151]) Cf. Love, Mémoire cité à la note 39, § 4, pp. 76-77 ; Ouvrage cité à la note 24, art. 62, p. 55; Shida, *Ibidem*, 1re partie, § 7, pp. 92-93.

([152]) La composante tangentielle de cette troisième force, n'étant plus nulle dès que le globe s'est déformé, doit entrer dans l'expression de la résultante tangentielle qui produit la déviation du pendule.

Les composantes tangentielles de la première et de la deuxième force sont respectivement

$$\frac{1}{a}\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{k}{a}\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \theta} \text{ (153)}$$

et dirigées dans le sens des θ décroissants pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pour trouver la composante tangentielle de la troisième en fonction de $\overline{W}_2$, nous devons tenir compte de la déviation propre de la tangente due à la déformation élastique du globe et de ses méridiens. L'équation de la surface du globe déformé étant

$$r = a + h\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \theta}, \qquad (13)$$

on trouve aisément (154) que le carré de son aplatissement e est donné par

$$e^2 = \frac{3fha\mathrm{M}}{g\mathrm{R}^3}, \qquad (22)$$

où les notations sont les mêmes que plus haut. L'angle δ que fait la normale au sphéroïde elliptique (sphère déformée) avec le prolongement extérieur du rayon vecteur OM, compté dans le sens des θ croissants, est donné avec une approximation suffisante par

$$\sin\delta = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = e^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{3fah\mathrm{M}}{g\mathrm{R}^3}\sin\theta\cos\theta, \qquad (23)$$

---

(153) Il nous suffit, pour une approximation du premier ordre, de calculer les composantes des deux premières forces suivant la tangente du globe *non déformé*.

(154) Il suffit pour cela de comparer l'équation (13), où $\overline{W}_2$ a la valeur déduite de (9), à l'équation

$$r = a\left[1 + \frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right)\right]$$

de l'ellipsoïde de révolution de rayon moyen a et d'aplatissement e.

ce qui peut s'écrire, d'après la valeur de $\overline{W}_2$ tirée de (9),

$$\sin \delta = -\frac{1}{g}\frac{h}{a}\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \theta}. \tag{24}$$

La composante tangentielle de l'attraction

$$g = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a}$$

sera alors

$$g \sin \delta = -\frac{h}{a}\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \theta}, \tag{25}$$

composante qui est dirigée, pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dans le sens des θ croissants.

La force qui produit la déviation du pendule est donc

$$F' = \frac{1 + k - h}{a}\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \theta}, \tag{26}$$

dans le sens des θ décroissants, pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Si le globe était parfaitement rigide, on aurait $h = k = 0$ et

$$F = \frac{1}{a}\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \theta}. \tag{27}$$

Si l'on admet que les déviations du pendule sont proportionnelles aux forces qui les produisent, on obtiendra, en désignant ces déviations par D' et D :

$$\frac{D'}{D} = \frac{F'}{F} = \frac{1 + k - h}{1}, \tag{28}$$

ce qui est bien le coefficient (20) de réduction des marées.

Il est bien clair d'ailleurs que les coefficients h et k sont les mêmes pour l'action combinée de la Lune et du Soleil que pour celle de la Lune seule.

Les expériences de Schweydar, Hecker, Meissner, Orloff et Shida ont montré qu'ici encore

$$\frac{D'}{D} = \frac{2}{3} \text{ environ},$$

ce qui donne de nouveau

$$1 + k - h = \frac{2}{3}, \qquad (29)$$

d'où

$$h - k = \frac{1}{3}, \qquad (B)$$

résultat identique à (A) ([155]). Ainsi nous n'obtenons pas de nouvelle relation unissant h et k. Pour avoir une donnée qui nous permette d'obtenir h et k séparément, il nous faut recourir à une troisième méthode.

VI.

Troisième méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des variations de la latitude.

On sait ([156]) que si la Terre était un corps de révolution, aplati suivant son axe de symétrie, parfaitement rigide, son mouvement « naturel » se composerait d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe instantané de rotation et

---

([155]) Il semble cependant, d'après les récentes recherches de Schweydar sur les ondes diurnes lunaire, luni-solaire et solaire O, K_1 et P [cf. Premier Mémoire cité à la note 41, Introd., p. 3 et chap. VII, p. 152; second Mémoire cité à la même note, chap. III, p. 72; *Comptes rendus de la XVII^e Conf. Assoc. géodés. intern.*, 1^er vol., Berlin, 1913, p. 53], que la valeur de $1 + k - h$ soit plus proche de $\frac{4}{5}$ que de $\frac{2}{3}$. Shida pense qu'il convient, pour certaines raisons, de modifier le même coefficient de Hecker de $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$, mais trouve lui-même, par des observations directes, une valeur proche de $\frac{4}{5}$; après comparaison, il se décide pour 0,78 [Mémoire cité à la note 45, 1^re partie, § 8, B, pp. 114-116].

([156]) Comparez ce que nous avons dit à la note 72.

d'un mouvement conique de balancement de ce dernier axe. Celui-ci, dans son mouvement vis-à-vis d'axes absolus (157), engendrerait, avec un mouvement angulaire uniforme, un cône droit à base circulaire, et *vis-à-vis du globe lui-même* engendrerait aussi, avec un mouvement uniforme, un cône droit à base circulaire ayant l'axe mineur (c'est-à-dire l'axe de révolution) du globe pour axe de symétrie. L'intersection de l'axe instantané de rotation avec l'ellipsoïde d'inertie du globe donne ce qu'on nomme les *pôles instantanés* I. D'après ce que nous venons de dire, l'un quelconque I de ces pôles, par exemple celui qui se trouve dans l'hémisphère boréal, décrirait autour de l'extrémité C_0 de l'axe de révolution (nommée aussi *pôle d'inertie*) une circonférence d'un mouvement angulaire uniforme. On peut montrer facilement (158) que, comme le globe de révolution est aplati, le mouvement de I autour de C_0 est *direct*, c'est-à-dire de même sens que le mouvement diurne de rotation de la Terre, et que la période est de $\frac{A}{C-A}$ jours sidéraux, A et C désignant les moments d'inertie équatorial et polaire du globe.

On sait d'ailleurs que l'action luni-solaire produit non seulement un balancement, vis-à-vis des axes absolus, de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement et par conséquent aussi un mouvement absolu assez complexe de l'axe polaire d'inertie OC_0 (159), mais encore introduit des oscillations

---

(157) Voyez les Traités classiques de mécanique, par exemple P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, Paris, t. II, 2e édit., 1904, chap. XX, n° 390, pp. 164-166; F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, chap. XXIX, n° 211, pp. 494-496; F. Klein et A. Sommerfeld, Ouvrage cité à la note 132, 1er fasc., 1897, chap. III, § 2, pp. 146-154; et aussi H. Janne, Mémoire cité à la note 3, Introduction.

(158) Cf. Janne, *Ibidem*, spécialement pp. 19-25.

(159) Cf., par exemple, J.-A. Serret, *Ann. Observ.*, Paris, t. V; *Mémoires Inst.*, Paris, t. XXXV; Poinsot, *Add. Connaiss. Temps*, Paris, *pour 1858;* F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, chap. XXII-XXVII, pp. 371-443; etc., et surtout F. Klein et A. Sommerfeld, Ouvrage cité à la note 132, 3e fasc., chap. VIII, pp. 633-672.

« forcées » (160) dans le mouvement du pôle I autour de C_0; ces dernières sont assez faibles et nous en ferons totalement abstraction (161). La théorie de la précession et nutation luni-solaires nous permet d'ailleurs d'obtenir, par des observations, la valeur du rapport $\frac{A}{C-A}$, qui vaut (162) environ 305.

Ainsi donc, si la Terre était parfaitement rigide et animée d'un mouvement de rotation naturelle, son pôle instantané de rotation I décrirait, autour de son pôle d'inertie C_0, une circonférence avec un mouvement angulaire uniforme et direct : il accomplirait une révolution complète en un laps de 305 jours, soit dix mois environ. Cette période est nommée *période eulérienne,* parce que c'est le célèbre géomètre bâlois L. Euler qui a signalé le premier (163) la possibilité de son existence.

Cela rappelé, considérons un lieu géographique M de la surface du globe. La colatitude géographique de ce lieu est, par définition, l'angle que fait la verticale du lieu avec l'axe instantané OI. Nous avons vu, au § V, que la verticale du lieu subit des déviations; supposons qu'ici elle soit invariable (164). Le mouvement de OI dans le globe doit causer une variation périodique de l'angle en question, donc une variation de la latitude. On peut montrer (165) que cette variation a la

---

(160) Cf. F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, pp. 420 et 496.

(161) Voyez cependant R. Radau, *Bull. astron.,* Paris, t. VII, 1890, p. 352; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, pp. 49-50.

(162) Cf. Th. von Oppolzer, *Lehrbuch der Bahnbestimmung*, t. I; trad. française de E. Pasquier, Paris, 1886, chap. V, § 1, *i*, p. 182.

(163) L. Euler, *Mechanica sive motus scientia*, Saint-Pétersbourg, 1736, 3e partie, chap. XVI, §§ 839 et suiv.; Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable (*Mém. Ac.*, Berlin, 1758, pp. 154-193); *Theoria motus corporum...*, Greifswald, 1765, chap. XII, §§ 711, 717-732.

(164) La variation de latitude causée par le déplacement propre de la verticale est inférieure à 0",01, tandis que celle due au mouvement de l'axe de rotation atteint 0",3. [Cf. E. Pasquier, Mémoire cité à la note 77, p. 67.]

(165) Cf., par exemple, E. Fergola, *Vierteljahrschrift der Astr. Gesell.,* Leipzig, 1876, pp. 94-103; F.-R. Helmert, Ouvrage et tome cités à la note 48, p. 393 : G.-H. Darwin, *Bull. Ac. Belgique* [Cl. des sc.], 1903, n° 1, pp. 147 et suiv.; C. le Paige, *Ibidem,* pp. 17 et suiv.; etc.

même période que le mouvement du pôle I. Ainsi, si la Terre était parfaitement rigide, les fluctuations de la latitude d'un lieu devraient présenter un caractère périodique de 305 jours.

Les astronomes ont essayé de déceler cette période dans les latitudes (166). Soupçonnée par Bessel, Brioschi, Pond (167), Airy (168), la variation de la latitude d'un lieu a été franchement reconnue par C.-A.-F. Peters (169) en 1844. Tour à tour, M. Nyrén (170), J. C. Maxwell (171), S. Newcomb (172), A. Gaillot (173), Y. Villarceau (174), Downing (175), E. Fergola (176), A. Nobile (177), L. de Ball (178), F. Folie (179) se sont livrés à l'étude de ce phénomène. Il semble que ce soit les observations de A. Nobile et de F. Küstner (180) et plus encore celles de Th. Albrecht (181) et Marcuse (182) qui

---

(166) Pour l'analyse de leurs Travaux, voyez F. Tisserand, Ouvrage et tomes cités à la note 48, chap. XXX, § 209, pp. 489-493; F. Tisserand et R. Radau, *Bulletin astronomique*, Paris, *passim*; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, 1re partie, § 1, pp. 26-42; Ch. Lallemand, 2e art. cité à la note 76, pp. 5-9; E. Pasquier, Mémoire cité à la note 77, chap. I, §§ 1-2, pp. 11-31; etc.

(167) Cités par F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, chap. XXX, § 209, p. 490.

(168) *Memoirs of the Astron. Society*, t. XXXII.

(169) *Bull. Ac. Sc.*, Saint-Pétersbourg, 1844; *Astr. Nachr.*, t. XXII, 1844, n° 512; *Mém. Observ.*, Saint-Pétersbourg, t. I, 1853.

(170) *Bull. Ac. Sc.*, Saint-Pétersbourg, t. XIX, 1871, et t. XXI, 1873.

(171) *Transactions Roy. Soc.*, Édimbourg, t. XXXII, 1857.

(172) Cité par Kelvin, *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sc.*, Londres, 1876; etc.

(173) *Comptes rendus*, Paris, novembre 1878; *Ann. Observ.*, Paris, t. VIII, 1862.

(174) *Ann. Observ.*, Paris, t. VIII, 1862.

(175) *Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, Londres, 1880, t. XL.

(176) *Determinazione della latitudine del R. Osserv.*, Capodimonte, 1872.

(177) *Ibidem*, 1883, 1885 et 1888.

(178) Cf. *Bull. astr.*, Paris, t. V, décembre 1888.

(179) *Mém. Ac. Belgique*, Bruxelles, t. XLV, 1884; *Bull. Ac. Belgique*, Bruxelles, *passim*.

(180) *Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationsconstante...*, Berlin, 1888.

(181) *Resultate der Beobachtungsreihen betreffend die Veränderlichkeit der Polhöhen*, 1890. Voyez aussi *Bull. astr.*, t. VII; *Astr. Nachr.*, t. CXXV.

(182) *Resultate der fortgesetzten Berliner Beobachtungsreihen betreffend die Veränderlichkeit der Polhöhen*, 1890.

aient forcé l'attention en montrant d'une façon irrécusable la périodicité de la fluctuation. Toutefois, c'est seulement en 1890 que l'astronome américain S. C. Chandler ([183]), après avoir procédé à l'analyse harmonique des mouvements du pôle I, a reconnu que ce pôle ne possède pas un mouvement circulaire d'une périodicité de 305 jours, mais bien un mouvement plus complexe, épicycloïdal, se composant d'un mouvement circulaire uniforme d'une périodicité de 427 jours environ, soit à peu près quatorze mois, autour d'une position moyenne I_o; et d'un mouvement elliptique de ce dernier pôle moyen I_o, autour du point fixe C_o, d'une périodicité de 365 jours, soit environ douze mois; quelques irrégularités périodiques se montraient aussi. Depuis lors, Chandler a continué ses études pour affermir et compléter ses conclusions ([184]), et d'autres astronomes lui ont prêté main-forte; parmi ces derniers, nous citerons F. Gonnessiat ([185]), Th. Albrecht ([186]), H.-G. et E.-F. van de Sande Bakhuyzen ([187]), L. Courvoisier ([188]), A. Pannekoek ([189]), F. Harzer ([190]), R. Schumann ([191]), E. Grossmann ([192]), B. Wanach ([193]), H. Kimura ([194]), Hirayama ([195]), Bonsdorff ([196]). En 1894, au Congrès d'Innsbrück,

---

([183]) *Astronomical Journal,* Boston, t. XI, 1891, nos 248-249.

([184]) *Astronomical Journal,* Boston, t. XI et suivants, *passim.*

([185]) *Bull. astr.,* Paris, t. XV, 1898; *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. CVI, 1888; t. CXXIV, 1897, et t. CXXVI, 1898.

([186]) *Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariationen,* Berlin, 1896 et années suivantes; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1898, no 3532; 1899, no 3633; etc.

([187]) *Bull. Ac. Sc.*, Amsterdam, 1898 et 1900; *Arch. néerl.,* Harlem, (2), t. II, 1899; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1904, no 3937; etc.

([188]) *Astr. Nachr.*, Kiel, 1904 et 1905, nos 3990, 3991, 4012, 4031.

([189]) *Ibidem,* 1905, nos 4008, 4024.

([190]) *Ibidem*, 1905, no 4028.

([191]) *Ibidem*, 1903, no 3877; 1907, nos 4142, 4143.

([192]) *Ibidem*, 1907, no 4159; *Bull. astr.*, Paris, t. XXIX et t. XXVI.

([193]) *Astr. Nachr.,* Kiel, 1907, no 4167.

([194]) *Ibidem,* nos 3783, 3932, 3981, 4040, 4041, etc.; *Astr. Journal*, Boston, *passim.*

([195]) *Astr. Nachr.*, Kiel, no 4281.

([196]) *Mitteilungen Nikolai-Hauptsternwarte,* Poulkova, t. III, no 33.

on a émis un vœu en faveur de la création d'un Service international, chargé de l'observation systématique des variations de latitude. Ce Service a été créé peu après et a commencé à fonctionner en 1899 [197].

Les résultats obtenus par le Service international des latitudes, dirigé avec tant de compétence par Th. Albrecht, confirment les conclusions de Chandler. Les observations de H. Kimura ont cependant montré que dans l'expression de la variation de la latitude intervient un terme annuel z qui semble indépendant de la position du pôle; plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer l'origine de ce terme [198], mais nous ne les examinerons pas ici.

La différence entre la conclusion de la théorie eulérienne et les résultats des observations de Chandler provient évidemment de ce que la première part d'une hypothèse trop simple : elle suppose que la Terre est parfaitement rigide et elle fait abstraction de l'influence des phénomènes perturbateurs d'ordre géologique, météorologique, etc., qui peuvent se produire en son intérieur ou à sa surface.

Si l'on suppose que la Terre est, au moins en partie, douée de plasticité, le problème de sa rotation devient beaucoup plus

---

[197] Pour les détails concernant ce Service, voyez le Rapport annuel publié par Th. Albrecht sur les Travaux exécutés par lui, *Resultate des internationalen Breitendienstes*, et les Analyses publiées par le *Bull. astr.*, t. XIII, XVI, XVIII, XX, XXIII, etc.; et surtout E. Pasquier, Mémoire cité à la note 77, chap. I, § 4.

[198] R. Schumann, *Astr. Nachr.*, Kiel, n° 3877; W. de Sitter, *Ibidem*, n° 3981; L. Courvoisier, deux premiers Articles cités à la note 188; A. Pannekoek, *Astr. Nachr.*, Kiel, n^{os} 4008, 4012, 4024, 4031; P. Harzer, *Ibidem*, n° 4028; Boccardi, *Comptes rendus*, Paris, 1900; *Bull. astr.*, Paris, 1900; Bonnsdorff, Article cité à la note 196; Hirayama, Article cité à la note 195; H.-G. van de Sande Bakhuyzen, *Astr. Nachr.*, Kiel, n° 3937; H. Poincaré, Article cité à la note 107, p. 7; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, Appendice, pp. 237-240; F. E. Ross, *Astr. Nachr.*, Kiel, n° 4593; Shinzo Shinjo, Ueber die physikalische Bedeutung des z-Gliedes in der Polhöhenschwankung (*Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto Imperial University*, Kyoto, t. IV, n° 2, décembre 1912); etc.

complexe, et les équations classiques, dites d' « Euler », ne suffisent plus pour déterminer les lois du mouvement. De plus, si l'on admet même que la Terre est solide dans toutes ses parties, elle ne peut cependant posséder qu'une rigidité relative et doit donc se déformer sous l'action de sa propre rotation et de la vertu attractive des autres astres : cette déformation est très complexe et réagit sur le mouvement. Si, au contraire, on suppose un noyau fluide, ou au moins une couche visqueuse, on devra tenir compte du frottement des parties fluides entre elles et de ces dernières sur les parties solides, etc. (199). Nous allons revenir de suite sur l'étude de la déformation élastique du globe; mais, auparavant, disons un mot des phénomènes perturbateurs auxquels nous venons de faire allusion.

Les changements géologiques que nous invoquons pour expliquer certains accidents de la croûte terrestre, ou que nous voyons actuellement s'opérer sous nos yeux, ont eu ou ont encore une répercussion sur la rotation de la Terre. A cette catégorie de phénomènes appartiennent les éruptions volcaniques, les tremblements de terre, le soulèvement ou l'abaissement séculaire de certaines contrées (200), la formation de nouveaux continents ou de nouvelles montagnes, etc.

---

(199) Consultez, à ce sujet, Hopkins, Hennessy, Delaunay, Kelvin, Faye, Folie, Belli, Ronkar, etc., Mémoires cités à la note 71, et surtout les Analyses, citées à la même note, de Tisserand, Helmert, Rudzki, Janne, etc. De plus, voyez H. Gyldén, *Bull. Ac. Sc.*, Saint-Pétersbourg, t. IV, 1870; *Nova Acta Soc. Reg* , Upsala, (3), t. VIII, 1871; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1878, n° 2226 ; *Bull. Ac. Sc.*, Stockholm, 1878, n° 7, et 1879, n° 3; G.-H. Darwin, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, 1877, t. CLXVII et premier Mémoire cité à la note 9; Airy, *Nature,* Londres, t. XVIII, 1878; S. Oppenheim, *Sitzungsberichte d. K. Ak. d. Wiss* , Vienne, t. XCII, 1885; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1885, n° 2701; S. S. Hough, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A, 1895, t. CLXXXVI; J.-V. Schiaparelli, *Il Nuovo Cimento,* (3), t. XXX, 1891; Th. Sludsky, *Bull. Soc. Impér. Natur.*, Moscou, 1895, n° 2, et 1896, n° 1; *Bull. astr.*, Paris, t. XVII, juin 1900; J. Larmor, *Proc. Phil. Soc.*, Cambridge, t. IX, mai 1896. On trouvera des indications plus complètes dans notre Mémoire cité à la note 3.

(200) Cf. P. Schwahn, Mémoire cité à la note 71, §§ 8-9; G.-H. Darwin, *Phil. Trans. R. S.*, Londres, 1877, t. CLXVIII, § 4; J.-V. Schiaparelli, Mémoire cité à la note 199, art. 2 et 3; L. Picart, *Ann. Observ.*, Bordeaux, t. VII, 1897,

Nous devons également tenir compte de l'existence des océans : les protubérances qu'ils forment sous l'action combinée de l'attraction du Soleil, de la Lune et des réactions centrifuges ([201]), le frottement des marées sur la surface du globe ([202]) influent, eux aussi, sur la rotation de ce dernier. Les courants marins, même s'ils ne changent guère la répartition des masses à la surface du globe, introduisent dans les équations différentielles du problème des quantités de mouvement relatif et modifient de ce chef les circonstances du mouvement de la Terre ([203]).

Nous en dirons autant des perturbations atmosphériques, qui, cependant, peuvent peut-être produire, en outre, des inégalités plus sensibles dans la répartition des masses ([204]).

---

§ 15; S. Haughton, *Proc. Roy. Soc.*, Londres, 1878; E. Hill, *Proc. Roy. Soc.*, Cambridge, t. III, 1868; Hayford et Baldwin, *Movements in the California. Earthquake*, Coast and Geod. Survey, 1906-1907, App. 3, p. 97; etc. Sur l'influence exercée ou subie par les tremblements de terre, voyez particulièrement, J. Milne, *Brit. Assoc. Reports*, 1896-1912, et F. de Montessus de Ballore, *Variations des latitudes et tremblements de terre*, Comptes rendus Ac. Sc., Paris, t. CXLVII, 1908, pp. 665 et suiv.; T. Shida, Mémoire cité à la note 45, 5e partie, pp. 265-276.

([201]) Cf. F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, pp. 535-536; R. Radau, *Bull. astr.*, Paris, t. VII, septembre 1890; *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. CI, octobre 1890; F.-R. Helmert, Ouvrage et tome cités à la note 48, chap. V; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1891, n° 3014.

([202]) E. J. Stone, *Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, Londres, mars 1867; H. Gylden, Mémoires cités à la note 199; F. Klein et A. Sommerfeld, Ouvrage cité à la note 132, 3e fasc., pp. 726 et suiv.; H. Janne, Ouvrage cité à la note 3, pp. 231-237; et surtout G.-H. Darwin, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, t. C, 1879, 1880, 1882; *Scientific Papers*, t. II; *The Tides*, Londres, 1898; art. *Tide* dans Encycl. Britannica, 11e édit.; *Encyk. d. m. Wiss.*, t. VI, 1, B, art. 1, litt. E; etc.

([203]) Voyez surtout V. Volterra, *Atti d. R. Acc. d. Sc.*, Turin, 1895; *Annali di Matematica*, 1895 et 1896; *Rend. d. R. Acc. dei Lincei*, Rome, septembre 1895; *Astr. Nachr.*, Kiel, 1895, nos 3291-3292; *Acta Mathematica*, t. XXII, 1898; F. Klein et A. Sommerfeld, Ouvrage cité à la note 132, 3e fasc., p. 715; J. Lamp, *Astr. Nachr.*, Kiel, 1891, n° 3014; etc.

([204]) R. Spitaler, *Denkschriften d. K. Ak. d. Wiss.*, Vienne, t. LXIV, 1897; *Geogr. Mitteilungen* (Petermann), Gotha, 1901, n° 137; *Sitzungsberichte d. K. Ak. d. Wiss.*, Vienne, II A, t. CXIV, 1905; L. Grabowski, *Ibidem*, Vienne, II A, t. CVII, 1898; etc.

La fonte des glaces polaires ([205]), le déplacement, la formation ou la disparition des glaciers sont encore autant de causes capables d'amener des perturbations dans le mouvement du globe.

Le raissellement des fleuves, l'arrachement et la désagrégation des roches ou des terrains déjà formés, le dépôt des alluvions aux embouchures des cours d'eau ([206]), le desséchement de lacs ou de mers intérieures ([207]), l'action dissolvante des eaux de ruissellement ([208]), etc., peuvent aussi apporter des fluctuations dans ce mouvement.

Enfin, comme causes extérieures, on a même songé à invoquer un couple d'origine magnétique, en rapport avec les taches du Soleil ([209]) et aussi les chutes de météorites qui introduisent de nouvelles masses dans l'écorce du globe.

Nous n'avons pas l'intention de citer ici tous les phénomènes perturbateurs de ce genre ([210]) : ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre combien est complexe le problème de la rotation de la Terre.

([205]) KELVIN, *Report Brit. Assoc. f. Adv. of Sc.*, Londres, 1876; A. WATERS, *Trans. Litt. and Phil. Soc.*, Manchester, t. IV, 1877; F.-R. HELMERT, Ouvrage et tome cités à la note 48, chap. V; etc.

([206]) A. DE LAPPARENT, Ouvrage cité à la note 71; *La destinée de la terre ferme*, Paris, 1904; J. MURRAY, *Scottish Geographical Magazine*, 1887-1889; A. WATERS, *Trans. Litt. and Phil. Soc.*, Manchester, t. VI, 1879; TWISDEN, *Ibidem*, t. V, 1878; *Quarterly Journal Geol. Soc.*, Londres, 1878; L. MORGAN, *Geol. Magazine*, Londres, 1878; P. SCHWAHN, Mémoire cité à la note 71, § 7; etc.

([207]) A. WATERS, Mémoire cité à la note 206; K. ZÖPPRITZ, *Geographisches Jahrbuch*, Gotha, t. VIII, 1890; etc.

([208]) J. MURRAY, Mémoire cité à la note 206; T. MELLARD READE, *American Journal of Science*, (3), t. XIII; *Addr. Soc. Geol.*, Liverpool, 1895; A. L. EWING, *American Journal of Science* (3), t. XXIX; etc.

([209]) J. HALM, *Astr. Nachr.*, Kiel, nos 3619, 3649; W. THACKERAY, *Ibidem*, no 3635; etc.

([210]) Pour l'ensemble de ces phénomènes, voyez surtout G.-H. DARWIN, Influence of geological changes on the Earth's axis of rotation (*Phil. Trans-Roy. Soc.*, Londres, t. CLXVII, 1877); S. HAUGHTON. Notes on physical Geology (*Proc. Roy. Soc.*, Londres, t. XXVI, 1878); F. TISSERAND, Ouvrage et tome cités à la note 48; F.-R. HELMERT, Ouvrage et tome cités à la note 48; P. SCHWAHN, Mémoire cité à la note 71.

On montre facilement ([211]) que le mouvement circulaire uniforme du pôle de rotation I autour de sa position moyenne I_0 peut voir la période de dix mois de son mouvement se changer en période de quatorze mois (*période chandlérienne*) si l'on fait entrer en ligne de compte l'élasticité de la Terre; que le mouvement elliptique, de période annuelle, de I_0 autour du point fixe C_0 peut être causé par des phénomènes perturbateurs tels que ceux que nous venons de considérer, spécialement les déplacements atmosphériques ([212]), si l'on observe que l'influence de ces derniers peut être notablement amplifiée par une sorte de « résonance » ([213]) qui se produit grâce à la faible différence qui existe entre les périodes de douze et de quatorze mois; et qu'enfin les oscillations irrégulières peuvent trouver aussi leur explication dans des phénomènes perturbateurs non périodiques.

Il est clair que, dans ce Travail, nous ne nous préoccuperons que du premier point, savoir l'influence de l'élasticité du globe sur la durée de la période de libre précession; et, inversement, des renseignements que peut nous donner sur l'élasticité du globe la période des variations des latitudes nouvellement découverte par Chandler.

C'est S. Newcomb ([214]) qui, en s'appuyant sur les résultats classiques obtenus par Kelvin relativement à la rotation des sphères élastiques, a le premier signalé l'élasticité du globe comme cause capable d'amplifier la période eulérienne de dix mois. Sa conclusion était que, pour que cette période devînt celle de Chandler, la Terre devait céder un peu moins aux réactions centrifuges dues à sa rotation que si elle possédait la rigidité de l'acier. Ses considérations étaient basées sur un raisonnement

---

([211]) Pour les détails, consultez notre Mémoire cité à la note 3.

([212]) Voyez les Mémoires cités à la note 204, et notre Mémoire cité à la note 3, pp. 192-194 et 218-221.

([213]) A laquelle correspond la *multiplication de* Radau. [Cf. Radau et Helmert, Mémoires cités à la note 201.)

([214]) On the Dynamics of the Earth's rotation with respect to the periodic Variation of Latitude (*Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, Londres, t. LII, n° 5, mars 1892, pp. 336 et suiv.)

cinématique un peu simpliste ; de plus elles étaient légèrement erronées en ce qu'il ajoutait à une certaine ellipticité primitive, une ellipticité supplémentaire, au lieu de l'en retrancher, comme cela doit être (215).

S. S. Hough (216) a repris l'étude de la rotation d'une sphère élastique, homogène, isotrope et incompressible, lui a donné une forme plus mathématique et a corrigé l'erreur de Newcomb. Il a démontré le théorème suivant qui joue un rôle capital dans la théorie de la libre précession : *La période de libre précession d'une sphère élastique, homogène, isotrope et incompressible est égale à celle d'une seconde sphère identique, mais parfaitement rigide, dont la forme serait celle que prendrait la première si la rotation venait à cesser* (217) : théorème que plus tard, J. Larmor a montré être vrai pour un globe hétérogène et compressible (218). Toutefois le procédé de Hough était exposé à une grave objection (219), que G. Herglotz a d'ailleurs formulée dans un Travail postérieur (220). Hough admettait pour période de libre précession du globe non déformé T = 305 jours, donc supposait implicitement qu'il n'était pas homogène (221) ;

---

(215) Cf. S. S. Hough, Mémoire cité à la note 33, pp. 341-342, et notre Mémoire cité à la note 3, pp. 113-114.

(216) Mémoire cité à la note 33.

(217) Cf. *Ibidem*, § 8 ; F. Klein et A. Sommerfeld, Ouvrage cité à la note 132, 3e fasc., chap. VIII, B, § 7, 4e problème, pp. 698-702, et aussi chap. VII, § 8, p. 607 ; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, 2e partie, § 3, pp. 75-80 ; M. Stapfer, Mémoire cité à la note 132, 2e partie, ch. II, § 3, pp. 36-37.

(218) Cf. Mémoire cité à la note 39 ; *Proc. Roy. Soc.*, Londres, p. 482, et *Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, Londres, p. 91. Voyez aussi J. Larmor et E. H. Hills, The irregular Movements of the Earth's axis of Rotation (*Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, Londres, t. LXVII, n° 1, 1906, pp. 22-34), spécialement p. 24 ; et *Bull. astr.*, Paris, t. XXVII, juillet 1910, p. 276. Comparez nos considérations élémentaires sur le même sujet (Mémoire cité à la note 3, 2e partie, § 3, pp. 75-86).

(219) Cf. F. Klein et A. Sommerfeld, Ouvrage cité à la note 132, 3e fasc., pp. 701-702 ; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, pp. 110-111.

(220) Mémoire cité à la note 32, p. 276.

(221) Sans quoi, il aurait dû prendre T = 232 jours. [Voyez les Traités de mécanique céleste.]

mais pour calculer le facteur d'augmentation, il se plaçait dans l'hypothèse de l'homogénéité; ceci eût été vraiment une inconséquence, si Hough ne l'avait proposé uniquement comme expédient.

G. Herglotz ([222]) a vivement critiqué cette manière de faire. Dans ses recherches personnelles, il a supposé le globe incompressible et a admis, pour la répartition des densités, la loi de Roche, puis celle de Wiechert, et a trouvé respectivement pour le facteur d'augmentation $\frac{1}{1-\nu}$, 1,575 et 1,590, alors que Hough avait indiqué 1,475.

M. P. Rudzki ([223]) a donné un commentaire explicite des Travaux de ses devanciers et a, le premier, traité en détail l'influence que pouvait avoir, sur leurs conclusions, la présence d'un océan répandu sur la surface du globe, point qui n'avait été qu'effleuré par d'autres auteurs mais qui a été repris, depuis lors, par Brill ([224]). W. Schweydar ([225]) s'est tout d'abord borné à enregistrer les résultats obtenus par Herglotz. Mais A. E. H. Love est parvenu à obtenir la formule de Herglotz, que nous allons établir tout à l'heure, sans avoir recours à l'hypothèse (de l'homogénéité ni à celle) de l'incompressibilité ([226]); il admet seulement qu'une théorie d'équilibre est applicable et que les surfaces d'égale densité, à l'intérieur du globe, sont maintenues sous la forme elliptique (stratification concentrique). D'ailleurs J. Larmor a montré que ce dernier postulat n'est

---

([222]) Mémoire cité à la note 32.

([223]) Mémoire cité à la note 34; pour le dernier point, spécialement chap. V, pp. 335-368. Comparez note 276.

([224]) Cf. S. Newcomb, Article cité à la note 214; R. S. Woodward, *Astronomical Journal*, Boston, t. XV, 1896, n° 345, pp. 61-72; H. Poincaré, Article cité à la note 77, p. 12; E. Pasquier, Mémoire cité à la note 107, p. 83; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, pp. 116-117; J. Larmor, On the free Eulerian Precession (*Proc. Phil. Soc.*, Cambridge, t. IX, mai 1896); A. Brill, Mémoire cité à la note 44.

([225]) Mémoire cité à la note 35, chap. IV, pp. 75-77.

([226]) Mémoire cité à la note 39, § 8, form. (15) de la p. 80. Voyez aussi T. Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction, § 4, p 15.

même plus nécessaire ([227]); toutefois nous l'admettrons encore pour nous rapprocher de ce qui précède.

Love a en même temps indiqué, en une élégante synthèse que nous reproduisons ici, la manière la plus convenable d'envisager l'ensemble des trois premières méthodes dont il est question dans ce Travail.

Ch. Lallemand ([228]) et E. Pasquier ([229]) ont donné aussi d'excellents résumés des résultats obtenus par leur devanciers. Enfin Love vient de publier, dans un Ouvrage récent ([230]), les conclusions de ses belles recherches sur les principaux problèmes de la Géodynamique.

Indiquons succinctement comment la période observée (dans les latitudes et par conséquent) dans les mouvements du pôle instantané I peut nous renseigner sur le degré d'élasticité du globe; nous suivons, dans cet exposé, comme nous venons de le dire, la méthode de A. E. H. Love ([231]).

Supposons que le corps de la Terre soit de révolution et aplati et soit animé initialement de la rotation uniforme ω autour de son axe de révolution; cette rotation uniforme produit déjà une déformation statique élastique, si l'on prend pour état « non déformé » de référence celui qui s'établirait si le globe n'avait pas de rotation vis-à-vis des axes absolus. Prenons de nouveau l'origine des axes au centre de figure O de la Terre, Oz dirigé suivant l'axe de révolution, de rotation et principal d'inertie OC_0; prenons Ox, Oy quelconques, mais à angle droit, dans le plan équatorial : ces axes sont aussi principaux d'inertie. Imaginons que par suite d'une perturbation quelconque l'axe de rotation OI cesse de coïncider avec Oz, mais

---

([227]) Cf. J. Larmor, Mémoire cité à la note 39; *Proc. Roy. Soc.*, Londres, p. 94; *Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, Londres, pp. 484-485. Voyez aussi E. H. Hills, Rapport cité à la note 121, p. 387.

([228]) Articles cités à la note 76.

([229]) Mémoire cité à la note 77.

([230]) Ouvrage cité à la note 24.

([231]) Mémoire cité à la note 39, §§ 8-9, pp. 78-80, et aussi Ouvrage cité à la note 24, chap. IV, art. 60, p. 54; Shida emploie comme nous le procédé analytique de Love (Mémoire cité à la note 45, Introduction, § 4, pp. 14-15).

ne s'en écarte que d'un angle très petit, que nous considérons comme « petit du premier ordre » ; soient l, m, 1 les cosinus directeurs (aux termes du second ordre près) de la nouvelle position de OI vis-à-vis des axes Ox, Oy, Oz ; la rotation ω est d'ailleurs supposée rester la même (en module). Dans ce cas, si l'on considère le mouvement de rotation *naturelle* du sphéroïde terrestre, les seules forces qui produisent la déformation élastique du globe proprement dite sont des forces *relatives* centrifuges (résultant de la suppression des réactions centrifuges due à la rotation ω autour de Oz et de l'introduction de celles dues à la rotation ω autour de la nouvelle position de OI) dérivant du potentiel

$$W = W_2 = -\omega^2(lx + my)z, \tag{30}$$

harmonique sphérique solide du second degré (252).

Nous avons encore

$$\left\{ \quad U = H(r).\frac{W_2}{g}, \quad \right\} \tag{31}$$

$$\left\{ \quad \Delta = f(r).\frac{W_2}{g}, \quad \right\} \tag{32}$$

Le déplacement (u, v, w) d'un point M du sphéroïde doit se superposer au déplacement (compté à partir de la position d'équilibre relatif, pour une rotation nulle) dû à la rotation ω autour de Oz. Or il est facile de voir que si, avant la déformation proprement dite, les moments et produits d'inertie, par rapport à Ox, Oy, Oz, du globe sont respectivement.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A, & A, & C, \\ 0, & 0, & 0, \end{array} \right\}$$

---

(252) Love, *Ibidem* ; Hough, Mémoire cité à la note 33, § 8, p. 342 ; Rudzki, Mémoire cité à la note 34, chap. IV, p. 299 ; Herglotz, Mémoire cité à la note 32, chap. IV, p. 290 ; Brill, Mémoire cité à la note 44, chap. II, § 5, pp. 29-30. S. Newcomb avait négligé de considérer l'effet dû à la disposition des premières réactions centrifuges, et c'est ce qui l'a conduit à une méprise concernant les ellipticités [Cf. note 215 et Hough, *Ibidem*].

après la déformation due à la déviation de OI, ces moments et produits d'inertie sont, aux termes du second ordre près ([233]),

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A, & A, & C, \\ D, & E, & 0 \end{array} \right\}$$

où D, E ont les valeurs suivantes :

$$\left\{ D = -\frac{8}{15}\pi m\mathrm{I}, \right. \tag{33}$$

$$\left. E = -\frac{8}{15}\pi l\mathrm{I}, \right\} \tag{34}$$

avec

$$\mathrm{I} = \frac{\omega^2}{2g}\int_0^a \rho \left\{ \frac{d}{dr}\left[r^6.\mathrm{H}(r)\right] - r^6.f(r) \right\} dr. \tag{35}$$

Posons encore

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^a \rho \frac{d}{dr}(r^5 e)dr, \tag{36}$$

et

$$\nu = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}, \tag{37}$$

e désignant l'aplatissement dû à la rotation ω autour de Oz. Alors comme ([234])

$$C - A = \frac{8}{15}\pi \mathrm{I}_0, \tag{38}$$

([233]) Cf. Herglotz, Love, *Ibidem*. Brill, en supposant le globe incompressible (et successivement homogène, puis composé suivant l'hypothèse de Wiechert) et recouvert partiellement (à peu près comme l'indique Kelvin) d'océans, on arrive à trouver que, contrairement aux formules (39), (40) ci-après, les coefficients de m et l, dans les expressions de D, E, ne sont pas les mêmes, mais légèrement différents. Le cercle chandlérien se transforme alors en une ellipse de faible excentricité. [A. Brill, Mémoire cité à la note 44, chap. II, § 9, pp. 63-67.]

([234]) Cf., par exemple, F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, p. 206; H. Buchholz, Ouvrage et tome cités à la note 48, p. 282; etc.

il vient, par (33), (34), (37),

$$\left\{ \begin{array}{l} D = -\nu(C - A)m, \\ E = -\nu(C - A)l. \end{array} \right\} \qquad (39)\ (40)$$

Dès lors, les composantes du vecteur « impulsion » sont, si $p = l\omega$, $q = m\omega$, ω sont les composantes de ω,

$$\left\{ \begin{array}{l} g_x = Ap + \nu l\omega(C - A), \\ g_y = Aq + \nu m\omega(C - A), \\ g_z = C\omega, \end{array} \right\} \qquad \begin{array}{l} (41) \\ (42) \\ (43) \end{array}$$

et les deux premières équations différentielles du mouvement [235]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dg_x}{dt} + qg_z - rg_y = 0, \\ \dfrac{dg_y}{dt} + rg_x - pg_z = 0, \end{array} \right\}$$

deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \omega\varepsilon(1 - \nu)q = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \omega\varepsilon(1 - \nu)p = 0, \end{array} \right\} \qquad (44)$$

où

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A}. \qquad (45)$$

Les équations (44) nous montrent que le mouvement de I est encore circulaire et uniforme, mais que sa période est

$$T' = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon(1 - \nu)}, \qquad (46)$$

---

[235] Voyez F. Klein et A. Sommerfeld, Ouvrage cité à la note 132, 1er fasc., p. 140; H. Janne, Mémoire cité à la note 3, p. 125; etc.

au lieu de

$$T = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon}, \tag{47}$$

période eulérienne d'un globe parfaitement rigide ($\nu = 0$).

Le rapport des périodes de libre précession est

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{1-\nu}. \tag{48}$$

Nous en déduisons

$$\nu = 1 - \frac{T}{T'}. \tag{49}$$

D'autre part, par (37), (35) et (16),

$$\nu = \frac{k\dfrac{a\omega^2}{2g}}{\dfrac{3}{5}\dfrac{1}{\rho_m a^3} I_0}, \tag{50}$$

et comme, par un théorème connu [236]

$$\frac{3}{5}\frac{1}{\rho_m a^3} I_0 = e - \frac{a\omega^2}{2g}, \tag{51}$$

nous déduisons de nouveau de (49)

$$k = \left(\frac{2ge}{a\omega^2} - 1\right)\left(1 - \frac{T}{T'}\right). \tag{52}$$

Telle est la formule que Herglotz a donnée le premier et que Love, puis Larmor ont généralisée.

Cette formule nous montre que le phénomène des varia-

([236]) Cf., par exemple, F. Tisserand, Ouvrage et tome cités à la note 48, p. 206; G. Herglotz, Mémoire cité à la note 32, chap. IV, p. 293; J. H. Pratt, *The Figure of the Earth*, 1865, p. 79; etc.

tions des latitudes nous permet de déterminer k séparément; alors (20) ou (28) nous fournira h.

Pour la Terre, nous avons, en unités C. G. S.,

$$a = 6{,}37 \times 10^8, \qquad g = 981, \qquad \omega = \frac{2\pi}{86164}, \qquad \frac{a\omega^2}{g} = \frac{1}{289}.$$

Si de plus nous prenons T = 305 jours sidéraux, T′ = 427 jours et $e = \frac{1}{297}$, aplatissement réel de la Terre donné par les mesures géodésiques, nous trouvons, par (52),

$$k = \frac{4}{15} \text{ environ. (C)}$$

En comparant (C) avec

$$h - k = \frac{1}{3} \text{ environ, (A ou B)}$$

nous trouvons

$$h = \frac{3}{5} \text{ environ. (AC) } (^{237})$$

VII.

Avant d'aborder l'étude de la quatrième méthode, il faut au préalable montrer ce que peuvent nous renseigner les valeurs (A ou B), (C), (AC) relativement à la rigidité du globe. Comme on a pu le remarquer, les raisonnements sur lesquels est basé l'établissement des formules (20), (28) et (52), bien qu'exigeant la légitimité de l'application au globe d'une théorie d'équilibre en couches concentriques stratifiées, ne présupposent nulle-

---

(237) Nous désignerons dorénavant par le symbole (MNP...) une valeur déduite de la comparaison des formules (M), (N), (P), ... — Sur l'existence d'une différence entre le coefficient k qui intervient dans la deuxième méthode et celui qui joue un rôle dans la troisième méthode, voyez SHIDA, Mémoire cité à la note 45, 6e partie et remarque terminale, pp. 277-286.

ment que l'on ait adopté telle ou telle hypothèse particulière concernant l'hétérogénéité, l'anisotropie ou la compressibilité de la substance qui le compose.

Mais il est clair que, pour pouvoir parler ici de « rigidité » ou de « compressibilité » du globe ou de l'une de ses parties, force nous est de faire *quelque supposition particulière* concernant ces propriétés physiques et respectant le postulat fondamental.

Nous dirons qu'un corps est *homogène*, sans plus, quand la densité cubique de la substance est la même en tous les points. Par opposition, nous dirons qu'un corps possède l'*homogénéité élastique* (238) quand la résistance élastique qu'offre sa substance aux déformations est la même en tous ses points; analytiquement, les trente-six coefficients des six éléments ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 de la déformation, dans les expressions des six tensions de Cauchy N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont alors des *constantes* pour tous les points, c'est-à-dire sont indépendants des coordonnées de ces points (239). Lorsque, de plus, la constitution élastique est, en chaque point, la même pour toutes les directions émanant de ce point, nous dirons que la substance composant le corps est *isotrope;* dans ce cas, les trente-six coefficients constants du cas plus général précédent, qui se réduisent déjà à vingt et une constantes par la considération du principe de la conservation de l'énergie (240), peuvent toutes s'exprimer, dans ce cas particulier, en fonction de deux constantes seulement (241); nous prendrons, pour ces dernières, les constantes élastiques λ, μ de Lamé (242),

---

(238) Cf. note 122.

(239) Voyez, par exemple, P. Appell, *Mécanique rationnelle*, Paris, t. III, 1re édit., 1903, chap. XXXVII, art. 798, p. 507; A. E. H. Love, *Elasticity*, Cambridge, 2e édit., 1906, chap. III, art. 66, p. 97; etc.

(240) Cf. G. Green, *Trans. Phil. Soc.*, Cambridge, t. VII, 1839; Kelvin, *Nat. Phil*, t. II, art. 673, pp. 213-216; Love, *Ibidem* et Introduction, p. 11; etc.

(241) Cf. Love, *Ibidem*, art. 68, pp. 99-100; Appell, *Ibidem*, art. 799, pp. 507-511; etc.

(242) G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1re édit., 1852.

Lorsque la substance sera à la fois homogène quant à la densité et quant à l'élasticité, et isotrope, nous dirons qu'elle possède une *homogénéité parfaite*.

Une substance « parfaitement homogène » peut d'ailleurs être *compressible* ou *incompressible*, aussi bien qu'une substance hétérogène et anisotrope.

Enfin, un corps peut se composer de plusieurs parties, homogènes séparément et de dimensions finies.

Ces définitions précisées, nous pouvons considérer successivement les trois hypothèses suivantes, qui comptent parmi les plus importantes de celles proposées pour le globe :

1. Homogénéité parfaite ([243]) ;

2. Homogénéité élastique et isotropie ; répartition des densités suivant la loi de Roche ;

3. Hypothèse de Wiechert ; homogénéité parfaite du noyau et de l'écorce, séparément.

1. **Homogénéité parfaite.** — *Données :* rayon moyen du globe $= a = 6{,}37 \times 10^8$ centimètres ; densité = densité moyenne $= \rho = 5{,}53$ grammes-masse par centimètre cube ; $g = 981$ centimètres par (seconde)^2.

Inconnues : λ, μ.

En admettant que h et k sont les données expérimentales, on a, d'après Love ([244]), la solution du problème en résolvant, par rapport à λ et μ, les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 a^2 = \dfrac{g\rho a}{\lambda + 2\mu} \left\{ \sqrt{4 + \dfrac{6(\lambda + 2\mu)}{\mu}} + 2 \right\}, \\ \beta^2 a^2 = \dfrac{g\rho a}{\lambda + 2\mu} \left\{ \sqrt{4 + \dfrac{6(\lambda + 2\mu)}{\mu}} - 2 \right\}, \end{array} \right. \qquad (53)$$

([243]) Il est clair, d'après ce que nous avons dit au § II, que cette hypothèse simpliste n'est proposée que dans le but d'obtenir des renseignements généraux sur l'ordre de grandeur de la rigidité de la Terre.

([244]) Ouvrage cité à la note 24, chap. VII-VIII, pp. 89-110.

où α et β sont eux-mêmes solutions des deux équations transcendantes

$$\left.\begin{aligned} &\frac{5}{2}-\frac{5}{6}\frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}A_2\psi_2-\frac{1}{3}A_2\psi_1+\frac{5}{6}\frac{\alpha^2+3\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}B_2\chi_2+\frac{1}{3}B_2\chi_1=h,\\ &A_2\psi_2+B_2\chi_2+C_2-1=k, \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

dans lesquelles on a employé les abréviations suivantes

$$\left.\begin{aligned} \psi_1&=\frac{\alpha a\cos\alpha a-\sin\alpha a}{\alpha^3a^3},\\ \psi_2&=\frac{(3-\alpha^2a^2)\sin\alpha a-3\alpha a\cos\alpha a}{\alpha^5a^5},\\ \chi_1&=\frac{\beta a\cosh\beta a-\sinh\beta a}{\beta^3a^3},\\ \chi_2&=\frac{(3+\beta^2a^2)\sinh\beta a-3\beta a\cosh\beta a}{\beta^5a^5} \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

et où A_2, B_2, C_2 sont solutions des trois équations

$$\left.\begin{aligned} &A_2\alpha^2\left\{\frac{3\alpha^2+\beta^2}{3(\alpha^2-\beta^2)}\left(\frac{25-\alpha^2a^2}{2}\psi_2+\psi_1\right)+\frac{\alpha^2a^2}{2}\psi_2+\psi_1\right\}\\ &-B_2\left\{\frac{\alpha^2+3\beta^2}{3(\alpha^2-\beta^2)}\left(\frac{25+\beta^2a^2}{2}\chi_2-\chi_1\right)+\frac{\beta^2a^2}{2}\chi_2+\chi_1\right\}=\frac{15}{2},\\ &A_2\{(3\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)(10\psi_2+2\psi_1)-(3\alpha^2-\beta^2)\alpha^2\beta^2a^2\psi_2\}=\\ &B_2\{(3\beta^2+\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)(10\chi_2-2\chi_1)-(3\beta^2-\alpha^2)\alpha^2\beta^2a^2\chi_2\},\\ &C_2=\frac{5}{2}-\frac{A_2}{2}\frac{3\alpha^2+\beta^2}{a^2-\beta^2}\psi_2+\frac{B_2}{2}\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\chi_2. \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Mais il est clair que de telles équations sont, pratiquement, irrésolubles directement : on doit nécessairement procéder par tâtonnements.

α) Premiers tatonnements. — On suppose la substance *incompressible* $k_1=\lambda=\infty$; il reste à déterminer μ. Il est

facile de montrer ([245]) que, si μ reste fini, mais que $\frac{\mu}{\lambda}$ tende vers zéro, α et β tendent tous deux vers zéro, et $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers l'unité ; que $\psi_1(\alpha a)$ tend vers $-\frac{1}{3}$, $\psi_2(\alpha a)$ vers $\frac{1}{15}$, $\chi_1(\beta a)$ vers $\frac{1}{3}$, $\chi_2(\beta a)$ vers $\frac{1}{15}$; et qu'enfin h tend vers

$$h = \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{19}{2}\frac{\mu}{\frac{4}{3}\pi f \rho^2 a^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{19}{2}\frac{\mu}{g\rho a}}, \tag{57}$$

ce qui est précisément le résultat indiqué par lord Kelvin ([246]). On conclut aussi de (54) que

$$k = \frac{3}{5}h, \tag{58}$$

ce qu'on peut déduire encore de (16), en faisant $\rho = \rho_m$, $f(r) = 0$.

Nous voyons immédiatement que la relation (58) est incompatible avec le système (A), (C) des valeurs données par l'observation.

Estimation I. — On peut se servir de (A) et de (58) pour déterminer h et k. On obtient

$$h = \frac{5}{6}, \qquad k = \frac{1}{2}, \tag{A, 58}$$

ce qui contredit

$$k = \frac{4}{15} \quad (C) \qquad \text{et} \qquad h = \frac{3}{5} \quad (AC).$$

([245]) Love, *Ibidem*, art. 123, p. 108. Pour une comparaison analogue à la nôtre, voyez Shida, Memoire cité à la note 45, Introduction, § 4, pp. 16-20.

([246]) *Natural Philosophy*, t. II, art. 840, pp. 436-437 ; voyez aussi Love, *Elasticity*, chap. XI, art. 184, p. 254 ; Shida, *Ibidem*, n° 1, p. 16 ; etc.

Si cependant on calcule μ par (A, 58) et (57), on obtient

$$\mu = \frac{4}{19} g\rho a = \frac{4}{19} \times 3{,}5 \times 10^{12} = 7{,}6 \times 10^{11} \text{ dynes par cm}^2. \quad \text{(A, 58, 57)}$$

C'est le résultat de lord Kelvin (247) : la rigidité obtenue est à peu près celle, $7{,}7 \times 10^{11}$, qu'il adoptait pour l'acier.

Estimation II. — On peut combiner (C) et (58). On a alors

$$h = \frac{4}{9}, \quad k = \frac{4}{15}, \qquad \text{(C, 58)}$$

ce qui contredit d'ailleurs

$$h - k = \frac{1}{3} \quad \text{(A)} \qquad \text{et} \qquad h = \frac{3}{5}; \quad \text{(AC)}$$

puis, pour la rigidité, on obtient, par (57),

$$\mu = \frac{37}{76} g\rho a = 17{,}0 \times 10^{11}, \qquad \text{(C, 58, 57)}$$

rigidité plus de deux fois aussi grande que la précédente (248).

Estimation III. — On peut aussi — cela semblera peut-être encore plus arbitraire — partir de $h = \frac{3}{5}$ (AC); on a alors, par (58),

$$k = \frac{9}{25} \text{ (AC, 58)},$$

et, par (57),

$$\mu = \frac{1}{3} g\rho a = 11{,}7 \times 10^{11}. \qquad \text{(AC, 57)}$$

---

(247) *Natural Philosophy*, t. II, art. 837-840, pp. 434-437; Shida, *Ibidem*, n° 1, p. 16.

(248) Shida, *Ibidem*, n° 2, p. 16.

Estimation IV. — Remarquons que les deux dernières valeurs de μ ont été obtenues au moyen de $k = \frac{4}{15}$ (C). Cette valeur a elle-même été trouvée, en employant (52) et en y faisant $\frac{a\omega^2}{g} = \frac{1}{289}$, T = 305 jours, T′ = 427 jours, $e = \frac{1}{297}$.

On peut se demander s'il est parfaitement légitime de choisir ces nombres; en effet, on sait que, pour un globe homogène, l'aplatissement e est égal à l'excentricité ε ([249]) et que la période de libre précession est donnée par $T = \frac{1}{\varepsilon}$ jours ([250]); si l'on suppose le globe homogène, il semble que l'on doive prendre $T = \frac{1}{e} = 252$ jours ([251]) au lieu de T = 305 jours; alors (52) donne $k = 0{,}685$ (C′), puis (58) fournit $h = 1{,}142$ (C′, 58); et enfin (57) donne

$$\mu = \frac{136}{1083} g\rho a = 4{,}4 \times 10^{11}. \qquad (C', 58, 57)$$

Estimation V. — Hough ([252]) a conservé T = 305 jours, mais a pris $e = \frac{1}{232}$. On trouve, si l'on accepte cette hypothèse un peu hybride, au moyen de (52), $k = 0{,}4226$ (C″), et, par (58), $h = 0{,}704$ (C″, 58); enfin, par (57),

$$\mu = \frac{449}{1672} g\rho a = 9{,}4 \times 10^{11}. \qquad (C'', 58, 57)$$

On voit que les chiffres diffèrent beaucoup d'une estimation à l'autre ([253]).

([249]) Cf., par exemple, Herglotz, Mémoire cité à la note 32, p. 295.

([250]) Voyez notre Mémoire cité à la note 3, 2e partie, § 3, p. 80.

([251]) Cf., par exemple, Herglotz, Mémoire cité à la note 32, p. 295; Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction, n° 2, p. 17.

([252]) Cf. Mémoire cité à la note 33, § 7, pp. 337-339. Le chiffre que nous obtenons est assez différent de celui $8{,}19 \times 10^{11}$ que Hough adopte pour l'acier; Shida, *Ibidem*, n° 2, pp. 16-17.

([253]) A. Brill trouve, dans l'hypothèse de l'homogénéité, en tenant compte de l'influence des océans,

$$\mu = 9{,}81 \times 10^{11}.$$

Voyez plus bas (note 286).

β) Seconds tatonnements. — On ne suppose plus la substance incompressible. A cause de la difficulté de l'estimation, Love se borne (254) à l'étude de deux cas simples et il procède d'ailleurs à cette recherche en suivant une méthode inverse.

Estimation VI. — Il fait une hypothèse qui simplifie notablement les calculs et qui consiste à prendre $\alpha a = 3$, $\beta a = 2$ (59), ce qui lui donne

$$\text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 7{,}16 \times 10^{11}, \\ \lambda = \dfrac{46}{25}\mu = 13{,}75 \times 10^{11}, \end{array} \right\} \qquad (59, 53)$$

et il cherche les valeurs de h et k correspondantes. Il trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0{,}932, \\ k = 0{,}513, \end{array} \right. \qquad (59, 53, 55, 56, 54)$$

ce qui donne $h - k = 0{,}419$. Ces valeurs contredisent (A), (C), (AC).

Il faut observer que les valeurs de μ et λ (59, 53) ne sont pas absolument arbitraires : μ correspond à peu près à la rigidité de l'acier ; de plus, le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est compris entre 1 et 2, ce qui arrive pour presque toutes les substances que l'on connaît.

Love calcule aussi les valeurs de h et k qui résulteraient de l'hypothèse d'une même rigidité $\mu = 7{,}16 \times 10^{11}$, combinée à celle de l'incompressibilité $\lambda = \infty$, et obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0{,}839, \\ k = 0{,}503, \end{array} \right.$$

---

(254) Ouvrage cité à la note 24, chap. VIII, art. 125 et 126, pp. 108-110.

et en conclut que l'hypothèse de la compressibilité augmente d'environ 10 % la valeur de h, tandis que celle de k n'est accrue, de ce chef, que d'une quantité insignifiante.

Estimation VII. — Love procède d'une façon identique en prenant $\alpha a = 3{,}3$, $\beta a = 3{,}1$, (60), ce qui lui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 6{,}955 \times 10^{11} \\ \lambda = \dfrac{2041}{1944}\,\mu = 7{,}303 \times 10^{11} \end{array} \right\} \quad (60, 53)$$

et

puis

$$\left\{ \begin{array}{r} h = 1{,}044, \\ k = 0{,}523, \\ h - k = 0{,}521, \end{array} \right\} \quad (60, 53, 55, 56, 54)$$

et

ce qui est encore en contradiction avec (A), (C), (AC). Avec la même rigidité μ et une incompressibilité parfaite, il trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0{,}855, \\ k = 0{,}513. \end{array} \right\}$$

L'augmentation de h, due à la compressibilité, va jusque 20 %; celle de k reste peu sensible.

Conclusion de l'examen de la première hypothèse (homogénéité parfaite). — Ces calculs et ces considérations ne doivent pas faire douter de la conclusion générale à laquelle lord Kelvin était parvenu, à savoir que la Terre, dans son ensemble, doit être très rigide et d'une rigidité comparable à celle de l'acier. Toutefois, il semble illusoire de vouloir chercher une détermination numérique précise, car les tâtonnements sont très pénibles et d'ailleurs l'hypothèse admise contredit ouvertement les faits. Suivant Love [255], la valeur de Kelvin, soit une

---

[255] Mémoire cité à la note 39, art. 12, p. 81, 2e note. Il s'agit ici, bien entendu, d'une opinion basée sur la comparaison des résultats des trois premières méthodes seulement.

rigidité comprise entre 7×10^{11} et 8×10^{11} dynes par centimètre carré, semble plus probable, pour la « Earth's tidal effective rigidity », que la valeur de Hough, qui est voisine de 9×10^{11}.

2. Homogénéité élastique et isotropie; répartition des densités suivant la loi de Roche. — *Données :* rayon moyen du globe $= a = 6{,}37 \times 10^8$ centimètres; $g = 981$ centimètres par (seconde)^2.

Loi de Roche :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - 0{,}764 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \qquad (61)$$

où ρ_0 = densité centrale = 10,1 grammes-masse par centimètre cube et, par conséquent, densité superficielle $\rho_1 = 2{,}384$ grammes-masse par centimètre cube.

Inconnues : λ, μ.

Herglotz, qui s'est placé dans cette hypothèse, a admis, vu la difficulté du sujet, que la substance est incompressible : $\lambda = \infty$. Dès lors, il ne reste plus qu'à déterminer μ. La solution que Herglotz a donnée ([256]) du problème de la déformation élastique ne permet pas de déterminer directement μ au moyen de h, comme cela était possible, par (57), dans la

---

([256]) Mémoire cité à la note 32, chap. II-III, pp. 283-289. Antérieurement Darwin avait recherché l'influence de l'hétérogénéité, en admettant que les ellipticités des couches concentriques d'égale densité fussent reliées à celle de la surface extérieure par la même loi que dans le cas de l'homogénéité et en admettant aussi que la loi des densités fût celle de Laplace [Cf. Mémoire cité à la note 31]; il avait obtenu, dans ces conditions, pour k les 0,972 de la valeur k_0 de k dans le cas d'un globe identique, mais homogène, isotrope et incompressible (voyez Première hypothèse), ayant pour densité $\rho_m = 5{,}5$; la loi de Laplace ou de Legendre qu'il admettait était

$$\rho = \rho_s \frac{a}{r} \frac{\sin \frac{r}{a} \theta}{\sin \theta}, \text{ avec } \rho_s = \frac{\rho_m}{2{,}1178} = 2{,}6 \text{ et } \theta = 144^\circ;$$

r désignait le rayon moyen de la couche d'égale densité.

solution de Kelvin; mais il a suivi le procédé inverse en se donnant μ et en calculant h ou k.

Les recherches de Herglotz comprennent trois points : 1° détermination de h, pour un μ donné, dans le cas en question, au moyen de la déformation élastique; 2° détermination de k, pour un μ donné, dans la même hypothèse, au moyen de la variation des latitudes; 3° un problème identique au 2°, mais avec la loi discontinue des densités de Wiechert, à la place de celle de Roche : problème qui sera traité succinctement plus loin.

Nous ne nous occupons maintenant que du 1° et du 2°.

1° *Détermination de* h. — Il trouve qu'avec l'hypothèse de l'homogénéité élastique, de l'isotropie, de la loi de Roche et une rigidité uniforme égale à celle de l'acier, qu'il prend égale à $\mu = 7{,}65 \times 10^{11}$, on doit obtenir

$$h = \frac{725{,}4}{898{,}4} h_0 = 0{,}807\, h_0, \qquad (62)$$

h_0 étant la valeur de h pour un globe identique, mais homogène de densité $\rho = 5{,}5$, et incompressible (voyez Première hypothèse) ([257]). Dans l'estimation I, nous avons trouvé, pour un globe possédant l'homogénéité parfaite et l'incompressibilité absolue, avec une rigidité très voisine de la précédente, soit $\mu = 7{,}6 \times 10^{11}$,

$$h_0 = \frac{5}{6}, \qquad (A, 58)$$

en nous basant sur la donnée expérimentale provenant de la

([257]) Il semble que Herglotz se soit mépris, en confondant la variation de h avec celle de k. D'après lui (Mémoire cité à la note 32, ch. III, p 289), 0,807 doit remplacer le chiffre de 0,972 (voyez note 256) de Darwin; or 0,972 se rapporte à k, tandis que 0,807 correspond à h.

mesure des marées océaniques ou des déviations de la verticale. Alors, combinant cette valeur de h_0 avec (62), nous avons :

$$h = \frac{2}{3}, \qquad (A, 58, 62)$$

pour le globe de Herglotz.

2° *Détermination de* k. — Comme nous l'avons dit ci-dessus, la formule (52) est due, au fond, à Herglotz. En l'appliquant à l'hypothèse actuelle, c'est-à-dire celle dans laquelle le globe possède l'homogénéité élastique, l'isotropie, l'incompressibilité et des densités variant suivant la loi (61) de Roche, après avoir pris, avec Herglotz, $\frac{T}{T'} = \frac{305,3}{481}$ (63), on trouve, avec $e = \frac{1}{297}$, $\frac{a\omega^2}{g} = \frac{1}{289}$,

$$k = 0,346. \qquad (52, 63)$$

Comparant les valeurs de h et k, on a

$$h - k = 0,321,$$

ce qui est voisin de $h - k = \frac{1}{3}$ (A ou B), d'où nous sommes partis pour trouver la valeur de h. Ce résultat est donc relativement satisfaisant; mais la période $T' = 481$ jours n'est pas la période chandlérienne.

5. **Loi des densités de Wiechert; homogénéité parfaite : α) du globe tout entier, β) du noyau et de l'écorce, séparément.**

Données : rayon du noyau sphérique = rayon de la surface interne de l'écorce $= b = 0,78a$; rayon de la surface externe de l'écorce $= a = 6,37 \times 10^8$ centimètres; $g = 981$ centimètres par (seconde)^2, à la surface externe de l'écorce; densités : noyau, $\rho_n = 8,206$ grammes-masse par centimètre cube; écorce, $\rho_e = 3,2$ grammes-masse par centimètre cube.

Inconnues : α) λ, μ du globe; β) λ_n, μ_n du noyau et λ_e, μ_e de l'écorce.

Herglotz, Brill, Schweydar et Love, qui ont traité ces cas, ont supposé, pour simplifier, que la substance composant le noyau et celle composant l'écorce sont toutes deux incompressibles, c'est-à-dire que, dans α, $\lambda = \infty$ et, dans β, $\lambda_n = \lambda_e = \infty$. Dès lors, il n'y a plus pour eux qu'*une* inconnue, μ, dans le premier cas et *deux* inconnues, μ_n et μ_e, dans le second. Adoptons cette hypothèse simplificatrice.

α) *Cas des rigidités égales* $\mu_n = \mu_e \equiv \mu$. — Schweydar trouve, pour h, la valeur ([258])

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \dfrac{0{,}00939 + 0{,}4099m}{0{,}00481 + 0{,}2712m + m^2} \\ \text{avec} \qquad m = \dfrac{\mu}{ag\rho_e} \end{array} \right\} \qquad (64)$$

En prenant encore la rigidité de l'acier $\mu = 7{,}65 \times 10^{11}$ et les valeurs ci-dessus de a, g, ρ_e, il trouve

$$h = 0{,}805 h_0, \qquad (65)$$

valeur qui se rapproche beaucoup de celle, (62), que Herglotz a obtenue, avec la loi des densités de Roche. Il faut remarquer que la forme de l'expression (64) permet de trouver facilement μ, lorsqu'on s'est donné préalablement h : l'équation à résoudre n'est, en effet, que du second degré.

Herglotz a obtenu d'ailleurs, avec l'hypothèse de Wiechert, la valeur ([259]), à très peu près équivalente à (64),

$$h = \frac{1{,}089 + 47{,}5m}{0{,}558 + 31{,}4m + 116m^2}. \qquad (65)$$

Si l'on se donne $h = \frac{3}{5}$ (AC), comme il résulte des observa-

---

([258]) Mémoire cité à la note 35, chap. I, p. 57, form. (20).

([259]) Mémoire cité à la note 32, chap. V, p. 298, form. (15).

tions des marées, des déviations de la verticale et des variations des latitudes, on obtient, pour m, l'équation

$$m^2 - 0{,}4123m - 0{,}01084 = 0$$

dont la racine positive est $m = 0{,}437$; à cette racine correspond

$$\mu = 8{,}71 \times 10^{11}, \qquad \text{(AC, 64)}$$

ce qui contraste violemment avec les valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 6{,}1 \times 10^{11}, \\ \mu = 5{,}5 \times 10^{11}, \\ \mu = 6{,}3 \times 10^{11}, \end{array} \right\}^{(260)} \qquad (66)$$

indiquées par Schweydar comme résultant des mesures respectives de la marée océanique lunaire bimensuelle, de la marée océanique lunaire mensuelle et des déviations de la verticale ([261]). Love trouve aussi ([262])

$$\mu = 6{,}3 \times 10^{11} \qquad (67)$$

pour valeur de la rigidité déduite des observations au pendule.

En ce qui concerne k, Herglotz trouve ([263]) une formule qui revient au fond à

$$k = \left(\frac{2ge}{a\omega^2} - 1 \right) \frac{1 + 49{,}2m}{1 + 56{,}39m + 208{,}4m^2}. \qquad (68)$$

Avec $k = \frac{4}{15}$ (C), c'est-à-dire pour $\frac{a\omega^2}{g} = \frac{1}{289}$, $e = \frac{1}{297}$,

---

([260]) Mémoire cité à la note 35, chap. III, p. 74; Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction, n° 3, p. 18.

([261]) Cf. *Ibidem*, chap. II, p. 61, form. (10).

([262]) Mémoire cité à la note 39, § 13, p. 82. Les calculs ne sont pas exposés en détail.

([263]) Mémoire cité à la note 32, chap. V, p. 298, form. (17).

T = 305 jours, T′ = 427 jours, on trouve, en résolvant cette équation par rapport à m, puis en déduisant de la solution la valeur de μ,

$$\left.\begin{aligned} &\mu = 11{,}68 \times 10^{11}, \\ &\text{d'après Herglotz } (^{264}), \text{ ou} \\ &\mu = 11{,}52 \times 10^{11}, \end{aligned}\right\} \qquad (C,68)$$

d'après Love (²⁶⁵).

Le contraste complet qui existe entre les valeurs (66) ou (67) déduites des mesures des déviations de la verticale et les valeurs (C, 68) obtenues au moyen des mesures des variations de la latitude, montre, d'après Love (²⁶⁶), que l'hypothèse d'une rigidité identique, pour le noyau et pour l'écorce, est absolument inadmissible. Aussi Schweydar, Brill et Love en sont-ils arrivés à considérer l'hypothèse suivante.

β) *Cas des rigidités différentes* $\mu_n \neq \mu_e$. — Ce cas comporte la détermination de deux inconnues μ_n et μ_e.

Herglotz a donné la formule suivante (²⁶⁷), d'où nous avons déjà tiré (68) :

$$\nu = 1 - \frac{T}{T'} = \frac{h + \dfrac{\rho_n - \rho_e}{\rho_e}\left(\dfrac{b}{a}\right)^5 h_1}{h' + \dfrac{\rho_n - \rho_e}{\rho_e}\left(\dfrac{b}{a}\right)^5 h_1'}, \qquad (69)$$

où h_1 est le coefficient analogue à h se rapportant à la surface du *noyau; h′*, h_1' désignent les valeurs de h et h_1 pour $\mu_n = \mu_e = 0$. Voici comment Schweydar utilise cette formule

---

(²⁶⁴) *Ibidem*, p. 299; Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction, n° 3, p. 17.

(²⁶⁵) Mémoire cité à la note 39, § 13, p. 82; Shida, *Ibidem*.

(²⁶⁶) *Ibidem*.

(²⁶⁷) Mémoire cité à la note 32, chap. V, p. 298, form. (16); cf. Schweydar, Mémoire cité à la note 35, chap. IV, p. 76, form. (1); Brill, Mémoire cité à la note 44, Introduction, p. 6. Brill considère en outre l'influence des océans : aussi le numérateur de sa formule, analogue à (69), contient-

et d'autres pour déterminer μ_n et μ_e [268]. Il ne passe pas par la détermination de la valeur de k, analogue à (68), que l'on déduirait facilement de la comparaison de (52) et de (69); mais il emploie les formules suivantes.

Tout d'abord, il fait observer que h et h_1 peuvent s'exprimer au moyen de μ_n, μ_e, au moyen des équations [269]

$$\left\{ \begin{array}{l} h\beta + h_1\beta_1 = \delta, \\ h\beta' + h_1\beta_1' = \delta', \end{array} \right. \tag{70}$$

où les coefficients ont pour valeurs, en fonction de $c \equiv \frac{\mu_e}{\mu_n}$ (71),

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \mathbf{M} + 0{,}3869c^3 + 1{,}0764c^2 + 0{,}7892c + 0{,}0653, \\ \beta' = \quad 0{,}4061c^3 + 1{,}0203c^2 + 0{,}6390c, \\ \beta_1 = \quad 0{,}4766c^3 + 1{,}1742c^2 + 0{,}7083c - 0{,}0199, \\ \beta_1' = \mathbf{M} + 0{,}5430c^3 + 1{,}3926c^2 + 0{,}8988c, \\ \delta = \quad 1{,}4187c^3 + 3{,}7412c^2 + 2{,}5292c + 0{,}0998, \\ \delta' = \quad 1{,}5467c^3 + 3{,}9394c^2 + 2{,}5022c, \\ \text{avec } \mathbf{M} = \frac{19\mu_e}{a\rho_e}(0{,}0274c^3 + 0{,}2353c^2 + 0{,}4678c + 0{,}2695). \end{array} \right. \tag{72}$$

Remarquant ensuite que

$$h' + \frac{\rho_n - \rho_e}{\rho_e}\left(\frac{b}{a}\right)^5 h_1' = 2{,}762, \tag{73}$$

comme on le déduit de (70) et (72), où l'on a eu soin de poser $c = 1$ [270], et de $\frac{b}{a} = 0{,}78$, $\rho_n = 8{,}206$, $\rho_e = 3{,}2$, et adoptant,

---

il un terme en plus, soit $h'' \frac{\rho_0}{\rho_e}$, ρ_0 étant la densité de l'eau des océans et h'' se rapportant à la surface libre de ceux-ci. Schweydar fait de même dans un Travail plus récent [Premier Mémoire cité à la note 41 chap. VIII, p. 54, form. (3)].

[268] Mémoire cité à la note 35, chap. IV, pp. 75-76.

[269] *Ibidem*, chap. I, p. 57, form. (19) et (19*a*).

[270] Car dans (70) et (72), on posera $\mu_n = \mu_e$ avant de les annuler toutes deux, puisque la formule (69) de Herglotz est établie pour $\mu_n = \mu_e$. L'application ultérieure de cette dernière formule pour $\mu_n \neq \mu_e$ semble être un défaut du procédé de Schweydar.

avec Schweydar, la valeur de T′ que Kimura a proposée en 1905 (au lieu de T′ = 427 jours), soit T′ = 434 jours, nous obtenons, par (69),

$$h + 0{,}579h_1 = 0{,}820. \tag{74}$$

Cette relation est donc basée uniquement sur la mesure de la période (de Kimura) des variations de latitude.

Pour obtenir une seconde équation, Schweydar a recours, comme nous l'avons fait nous-même, à la théorie des marées élastiques et des déviations de la verticale [271] et obtient

$$0{,}656h - 0{,}199h_1 = 0{,}339 \tag{75}$$

En résolvant le système (74), (75), il a

$$h = 0{,}622, \qquad h_1 = 0{,}343; \tag{76}$$

ces valeurs introduites dans (70), où les coefficients ont les expressions (72) avec $c \neq 1$, permettent, par la résolution d'une équation du troisième degré qui a une seule racine réelle positive, de trouver

$$\left.\begin{aligned} c &= 0{,}042, \\ \text{tandis que} \quad \mathrm{M} &= 0{,}235. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

De là il déduit, pour les coefficients de rigidité de l'écorce et du noyau [272],

$$\left\{\begin{aligned} \mu_e &= 0{,}9 \times 10^{11}, \\ \mu_n &= 20{,}2 \times 10^{11}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Brill [273] prend pour μ la valeur

$$\mu_e = 7{,}13 \times 10^{11}$$

---

[271] Cf. *Ibidem*, chap. II, p. 61, form. (10) et chap. IV, p. 76, form. (2).

[272] *Ibidem*, pp. 76-77; Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction. n° 3, p. 18.

[273] Brill, Mémoire cité à la note 44.

correspondant à la vitesse de propagation trouvée par Wiechert ([274]) pour les ondes sismiques B de distorsion dans l'écorce, et en déduit, par la considération de la période de Kimura, la rigidité du noyau :

$$\mu_n = 14{,}48 \times 10^{11}.$$

Love ([275]), en refaisant les calculs de Schweydar et en prenant des données légèrement différentes, a obtenu

$$\left.\begin{array}{l} \mu_e = \ 0{,}86 \times 10^{11}, \\ \mu_n = 21{,}50 \times 10^{11}. \end{array}\right\} \qquad (79)$$

Schweydar trouve, avec raison, les valeurs (78) invraisemblables. D'après lui, elles permettent de conclure qu'il doit exister, en dessous de l'écorce, une couche plastique recouvrant un noyau très rigide; les déformations relativement fortes que cette couche pourrait subir sous l'action de la Lune et du Soleil auraient leur répercussion sur celles de l'écorce et augmenteraient ainsi les marées de cette dernière.

Love, comme nous l'avons déjà dit ci-dessus, a soumis cette hypothèse au calcul ([276]). Il suppose qu'une théorie d'équilibre est applicable à la couche intermédiaire ([277]), que le noyau est parfaitement rigide ($\mu_n = \infty$), que la couche a la même densité que l'écorce et est très mince. Il trouve dans ce cas, pour la rigidité de l'écorce,

$$\mu_e = 35 \times 10^{11}, \qquad (80)$$

en partant de $h = \frac{3}{5}(AC)$: cela lui semble inadmissible.

([274]) Mémoire cité à la note 26. Voyez le ch. VIII et la note 289.

([275]) Mémoire cité à la note 39, § 13, p. 82. Ici non plus les opérations ne sont pas détaillées. Voyez aussi Shida, *Ibidem*.

([276]) Love, *Ibidem*, §§ 14-20, pp. 82-88.

([277]) Cf. *Ibidem*, § 1, p. 74, note ajoutée, et Ouvrage cité à la note 24, chap. IV, art. 55, p. 50, et surtout art. 63, p. 56; enfin Shida, *Ibidem*, p. 19.

Il fait remarquer que l'influence de la couche plastique, imaginée par Schweydar, est telle que, pour rendre compte des faits observés, une écorce ayant une épaisseur notable, soit 1,400 kilomètres, devrait posséder une rigidité cinq fois supérieure à celle de l'acier ! Et si on lui supposait seulement une épaisseur de 64 kilomètres, sa rigidité devrait devenir soixante-six fois aussi grande que cette dernière rigidité ! Il admet cependant qu'une couche plastique peut recouvrir certaines parties du noyau, mais seulement par plages isolées.

Mais tout récemment Schweydar ([278]) a étudié de plus près les conditions d'existence d'une telle couche de magma fluide et tiré d'autres conclusions.

Ces dernières sont que, sous l'écorce, il ne peut exister une couche fluide, composée, par exemple, de métaux fondus, de quelque épaisseur.

Il nous reste à dire un mot de l'influence des mers.

S. Newcomb ([279]) a pensé que le quart de la différence existant entre la période eulérienne et la période chandlérienne pourrait être attribué à l'influence des océans, qui recouvrent environ les trois quarts de la surface du globe.

R. S. Woodward ([280]) est allé jusqu'à dire que l'écart *tout entier* peut être attribué à cette influence.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, c'est M. P. Rudzki qui a, le premier, traité cette question d'une manière un peu approfondie ([281]).

Il se place dans l'hypothèse de Hough, c'est-à-dire celle, étudiée ici en premier lieu, où le globe est « parfaitement homogène » et incompressible ; cependant, il prend une

---

([278]) Premier Mémoire cité à la note 41, chap. II-III, pp. 15-32 ; spécialement p. 31.

([279]) Mémoire cité à la note 214, p. 337.

([280]) Mémoire cité à la note 224 ; cité par Hough, Mémoire mentionné à la note 33, p. 343.

([281]) Mémoire et extrait cités à la note 34 ; respectivement chap. V, pp. 335-368 et 283-311. Voyez aussi la dissertation de Brill citée à la note 44, chap. II, §§ 6-8, pp. 30-60.

densité moyenne généralement inférieure à celle (5,53) que nous avons admise ci-dessus, dans l'expression du potentiel des réactions centrifuges, parce que, selon une indication de Newcomb ([282]) que lui-même adopte ([283]), ces réactions étant surtout importantes pour les régions voisines de la surface et étant proportionnelles à la densité, l'effet de ces réactions, que l'on calculerait en prenant $\rho_m = 5{,}5$, serait exagéré. Newcomb avait choisi pour cette densité moyenne ρ_e, qu'il appelait « effective density », les 0,6 de la densité de l'acier, soit environ 4,48 grammes-masse par centimètre cube ; Rudzki fait diverses hypothèses ; il prend successivement $\rho_e = 2{,}2$; 3 ; 4 ; 4,5 ; 5,5, valeurs qui sont comprises entre la valeur de la densité superficielle $\rho_s = 2{,}2$ que Rudzki choisit et celle de la densité moyenne proprement dite $\rho_m = 5{,}5$. Il faut remarquer en outre que, seconde exception à l'hypothèse de l'homogénéité, Rudzki fait figurer, dans l'expression des variations du self-potentiel attractif du globe, dues aux déformations, non ρ_m ou ρ_e, mais bien la densité superficielle $\rho_s = 2{,}2$, puisque les élévations ou les abaissements qui se produisent, par rapport à la surface sphérique, sont composés de la substance formant la matière de sa surface ([284]). Moyennant ces deux remarques relatives à la densité du globe et l'adoption de la densité $\rho' = 1$ pour les eaux de l'océan, qui est supposé couvrir tout le globe, Rudzki trouve les rigidités suivantes ([285]) :

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{pour } \rho_e = 2{,}2, & \mu = 5{,}67 \times 10^{11} \text{ dynes par cm}^2, & & \\ \text{»} \quad 3\ , & \text{»} \quad 8{,}79 & \text{»} & , \\ \text{»} \quad 4\ , & \text{»} \quad 17{,}13 & \text{»} & , \\ \text{»} \quad 4{,}5, & \text{»} \quad 20{,}36 & \text{»} & , \\ \text{»} \quad 5{,}5, & \text{»} \quad 26{,}81 & \text{»} & , \end{array}\right\} \quad (81)$$

([282]) Mémoire cité à la note 214, p. 339.

([283]) Mémoire cité à la note 34, chap. V, p. 336; extrait cité à la note 34, pp. 287-288.

([284]) *Ibidem*, respectivement aux pp. 335-340 et 293.

([285]) *Ibidem*, respectivement aux pp. 366 et 311 ; Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction, n° 2, p. 17.

tandis que lorsqu'il néglige l'influence des océans et qu'il prend pour densité effective $\rho_e = \rho_m = 5{,}5$, il trouve, pour la rigidité du globe,

$$\mu = 12{,}50 \times 10^{11}, \text{ environ.} \qquad (82)$$

D'après lui, une densité effective, pour être admissible, doit être voisine de 4 : si l'on prend $\rho_e = 4$, on trouve une rigidité plus de deux fois aussi grande que celle de l'acier.

Plus récemment A. Brill, dans une intéressante dissertation ([286]), a repris l'étude détaillée de l'influence des mers sur la valeur du coefficient de rigidité μ du globe (hypothèse de l'homogénéité) ou de son noyau (hypothèse de Wiechert). Il admet, à très peu près, la répartition des mers indiquée par Lord Kelvin ([287]) et trouve que, si l'on veut que la nouvelle période de libre précession atteigne 456,6 jours, comme l'a indiqué H. Kimura ([288]), au lieu de 305,2 jours, on doit adopter les rigidités suivantes :

1° *Homogénéité.* — $\mu = 9{,}81 \times 10^{11}$ dynes par centimètre carré ;

2° *Hypothèse de Wiechert.* — Avec la valeur $\mu_e = 7{,}13 \times 10^{11}$ dynes par centimètre carré que l'on déduit, pour la rigidité de l'écorce, de la vitesse de propagation (5,23 kilomètres par seconde) des ondes sismiques de distorsion [indiquée par E. Wiechert et K. Zöppritz ([289])], $\mu_n = 14{,}48 \times 10^{11}$ dynes par centimètre carré.

([286]) Citée à la note 44.

([287]) Cf. *Natural Philosophy*, t. II, 1903, § 848, p. 449 ; M. Lévy, *Théorie des marées*, Paris, 1898, 1re partie, chap. I, pp. 14-15 ; A. E. H. Love, Mémoire cité à la note 38, §§ 57-61, pp. 226-239 ; A. Brill, Mémoire cité à la note 44, chap. II, § 7, pp. 51-52 ; etc.

([288]) *Astr. Nachrichten*, Kiel, t. CLXVI, 1904, n° 3981.

([289]) Mémoire cité à la note 26 ; A. Brill, Mémoire cité à la note 44, Introduction, p. 4, et chap. II, § 8, pp. 59-60 ; Shida, Mémoire cité à la note 45, Introduction, pp. 19-20. Voyez le chap. VIII et la note 274.

Dans les deux cas, le cercle chandlérien se transforme en une ellipse de faible excentricité.

Enfin, il y a deux ans, W. Schweydar ([290]) a examiné la même question et obtenu comme moyennes de valeurs correspondant à diverses hypothèses :

$$\begin{cases} \mu_e = 6{,}8 \times 10^{11} \text{ dynes par cm}^2. \\ \mu_n = 19{,}7 \times 10^{11} \quad \text{»} \end{cases}$$

VIII.

Quatrième méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des vitesses de propagation des ondes sismiques.

Il convient d'abord de décrire brièvement les phénomènes sismiques ([291]).

Il existe des contrées, telles que le Japon, le Chili, où les tremblements de terre sont des phénomènes presque journa-

---

([290]) *Untersuchungen...* (Premier Mémoire cité à la note 41), chap. VIII, pp. 53-57, spécialement p. 56.

([291]) Pour ce qui concerne la Sismologie, on peut consulter, entre autres : F. de Montessus de Ballore, *Les tremblements de terre* (Géographie séismologique, Paris, 1906); *La science séismologique*, Paris, 1907; etc. J. Milne, *Seismology*, Londres, 1898; *Reports of the Seismological Committee of the British Assoc. for the Adv. of Sc.*, passim, depuis 1896 jusque 1913; *Quarterly Journal of the Geological Society*, Londres, t. XXXIX, 1883; etc. E. Rudolph, *Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. VI, 1903. R. D. Oldham, *Mem. Geol. Survey Ind.*, t. XXIX, 1899. A. Schmidt, Wellenbewegung und Erdbeben... (*Jahresheft des Vereins für Vaterländ. Naturk. in Würtemberg*, t. XLIX, 1888). H. Benndorf, *Mitteilungen der Erdbebencommission der Ak. d. Wiss.*, Vienne, t. XXIX, 1905, et t. XXXI, 1906. B. Berloty, *Études*, 1906. Grablowitz, *Boll. della Soc. Sismol. Italiana*, passim. R. Stiatessi, *Boll. d. Soc. Meteorolog. Ital.*, (3), t. XXV. Agamennone, *Boll. d. Soc. Sismol. Ital.*, t. IV, 1898. A. Cancani, *Ann. d. Uffic. Cant. Meteor. et Geodyn. Italiano*, (2), t. XV, 1894; *Atti d. R. Acc. Lincei*, Rome, t. III, 1904; *Boll.*

liers; d'autres où ils sont relativement rares; d'autres enfin où ils ne se sont jamais fait sentir.

Dans un Ouvrage ([292]) de vaste érudition, F. de Montessus de Ballore a étudié, par l'examen de 171434 tremblements de terre enregistrés un peu partout, la répartition à la surface du globe des centres d'ébranlements sismiques; il a distingué les contrées *séismiques*, les contrées *pénéséismiques* et les contrées *aséismiques*.

Lorsqu'un tremblement de terre se produit en un lieu, non seulement le sol, en cet endroit, peut éprouver des chocs violents et par suite être animé de mouvements de grande

---

d. Soc. Sismol. Ital., t. II, 1896. Laska, *Mitteilungen*, t. XXIII, XXIX, ... R. Kövesligethy, *Math. naturw. Berichte aus Ungarn*, Budapest, 1897 et 1905; *Seismonomia*, Modène; *Mathematikai Ertesitö*, t. XXIX, 1906. Schlüter, *Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. V, 1903; G.-B. Rizzo, *Memor. d. R. Acc. d. Sc.*, Turin, (2), t. LVII, 1906. Linke, *Wöchentliche Erdbebenberichte des Geogr. Institutes*, Göttingen, 1907, n° 8. Articles innombrables de J. Milne, C. G. Knott, H. Nagaoka, Imamura, F. Omori, T. Shida, S. Hirota, ... dans les *Transactions of Seismological Society of Japan, Seismological Journal of Japan, Publications of the Earthquake Investigation Committee, Bull. Imp. Earthq. Invest. Comm.*, Tokyo, passim. Articles de J. Milne, Rockstroh, T. Shida, ... dans *Nature*, Londres, passim; du prince Galitzin dans le *Bull. Ac. Impér. Sc.*, Saint-Pétersbourg, passim, etc. Observations de F. Akerblom, C.-F. Kolderup, G. Angenheister, O. Eppenstein, F. Etzold, R. Schütt, O. Hecker, etc., etc. Spécialement C. G. Knott, Travaux cités à la note 28 et *Scottish Geogr. Magazine*, t. XV, 1899. O. Fisher, *Proceed. Phil. Soc.*, Cambridge, t. XII, 1904; M.-P. Rudzki, *Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. III-IV, 1898-1900; Mémoire cité à la note 34, chap. VI; *Bull. Ac. Sc.*, Cracovie, octobre 1911 et janvier 1912, etc.; Traité cité à la note 22, chap. V; etc. Ch. Jordan, *Revue gén. sc.*, Paris, t. XVIII, 1907. A. E. H. Love, Ouvrage cité à la note 24, chap. X et XI. E. Wiechert et K. Zöppritz, Mémoire cité à la note 26. L. Geiger et B. Gutenberg, Mémoire cité à la note 377. Et comme synthèse d'observations: R.-D. Oldham, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A, t. CXCIV, 1900. Ch. Jordan, Article cité. Knott, Rudzki, Love, Traités cités. Wiechert et Zöppritz, Mémoires cités. Galitzin, *Vorlesungen über Seismometrie*, Leipzig, 1914, etc. Enfin, les considérations très intéressantes et pleines de bon sens que H. Bouasse émet au sujet de l'application de la Théorie de la propagation des ondes (dans un milieu homogène et isotrope) à l'étude des tremblements de terre [*Cours de Physique*, Paris, t. I, 2e éd., 1913, ch. III, §§ 86-93, pp. 99-108].

([292]) Premier Ouvrage cité à la note 291.

amplitude, mais encore le sol des pays situés dans un rayon de plusieurs milliers de kilomètres, subit des vibrations que l'on nomme *vibrations* ou *secousses sismiques* : autrement dit, un tremblement de terre n'est *jamais local*, au sens rigoureux du mot.

On a imaginé des appareils nommés *sismographes* ([293]), qui enregistrent graphiquement les secousses, faibles ou fortes, du sol d'un lieu, en traçant des *sismogrammes*.

La comparaison des sismogrammes, tracés en divers endroits, et des époques précises où ils ont été enregistrés permet de reconnaître, dans une secousse transmise au loin (*télésisme*), tout d'abord que cette secousse ne se propage pas instantanément, mais qu'elle est transmise, de proche en proche, d'un endroit à l'autre avec une vitesse finie ; et ensuite que ses différents aspects (*phases*) ne sont pas les mêmes simultanément en tous les endroits. Cela montre que la secousse se transmet d'une manière analogue à celle dont se propage une onde d'ébranlement dans un milieu élastique. Voilà pourquoi on parle d'*ondes sismiques*.

Enfin la durée de l'ébranlement en un endroit augmente avec la distance de cet endroit à la source de l'ébranlement, en est ainsi fonction. Il en résulte que la source émet, dans un temps limité (qui est généralement très court), des ondes qui se propagent avec des vitesses différentes, et peut-être aussi suivant des chemins différents, et qui parviennent ainsi successivement, et avec des retards croissants, aux divers lieux d'observation.

Lorsqu'un tremblement de terre, causé par un ébranlement

([293]) Quant à la théorie de ces appareils, voyez E. Wiechert, Theorie der automatischen Seismographen. (*Abhandlungen d. Kgl. Gesellschaft d. Wiss.*, Göttingen, nouvelle série, t. II.) Pour la classification générale des sismographes, consultez R. Ehlert, Zusammenstellung... der wichtigsten Seismometer [*Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. III, 1897, pp. 350-475], et aussi E.-M.-S. Navarro-Neumann, S. J., Aperçu des instruments les plus usités en sismologie (*Bull. Soc. belge d'astron.*, Bruxelles, 14e année, 1909, nos 7-8, pp. 293-326.) Quant à l'exactitude de leurs tracés, cf. H. Arnold, Die Erdbewegung... [*Beiträge zur Geophysik* (Gerland), t. IX, 1907, pp. 269-317.]

ayant son origine à grande distance, va se propager et produire ses effets en un lieu, on remarque que le sol du lieu en reçoit d'abord comme le pressentiment : il est agité de *frissons avant-coureurs* qui durent généralement jusqu'à ce que l'*ébranlement principal* se fasse sentir.

Dans le cours de ces frissons, on distingue généralement *deux phases*, encore que, très souvent, la seconde ne soit guère discernable de la première : la distinction entre les deux phases semble provenir surtout de la théorie analytique qu'on veut leur appliquer (294).

On croit avoir reconnu que les mouvements vibratoires de la première phase ont des périodes plus courtes que ceux de la seconde et peut-être aussi des amplitudes un peu inférieures (295). La vitesse de propagation des ondes de la première phase est évidemment supérieure à celle des ondes de la seconde; voici quelques chiffres (vitesses en kilomètres par seconde) :

SISMOLOGUES.	Vitesse de propagation des ondes. 1re phase.	2e phase.
Cancani (296) .	5	2,5
Jordan (297) . .	12.	—
Wiechert (298) .	7	3,5

SISMOLOGUES.	Vitesse de propagation des ondes. 1re phase.	2e phase.
Oldham (299) .	14,5	8,8
Knott (300) . .	12,2	7
Love (301) . .	10	5

(294) Cf. M.-P. Rudzki, Ouvrage cité à la note 22, chap. V, § 5, p. 168. Voyez plus loin.

(295) *Ibidem* et Ch. Jordan, La propagation des ondes sismiques (*Revue générale des sciences pures et appliquées*, Paris, t. XVIII, 1907, n° 13, pp. 531-544, et n° 14, pp. 571-578), spécialement p. 544. Voyez aussi Knott, Ouvrage cité à la note 28, pp. 200 et 250, et Bouasse, Ouvrage et tome cités à la note 291, ch. III, § 88, p. 102.

(296) Mémoire mentionné à la note 291; cf. R. D. Oldham, Article mentionné à la note 299, p. 136.

(297) Article cité à la note 295, p. 544.

(298) Mémoire cité à la note 26, pp. 539 et 469.

(299) On the Propagation of Earthquake Motion to great Distances (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres, A, t. CXCIV, 1900, pp. 135-174), spécialement p. 166.

(300) Ouvrage cité à la note 28, p. 251.

(301) Ouvrage cité à la note 24, chap. XI, art. 193, p. 176, et Mémoire cité à la note 38, § 40, p. 214.

S. Kusakabe ([302]) a donné les résultats suivants :

ROCHES.	1re phase.	2e phase.
Roches primitives	3,91 à 6,12	2,70 à 4,40
» paléozoïques	2,10 à 5,68	1,03 à 4,33
» tertiaires	—	0,43 à 1,80
» mésozoïques	2,09 à 5,30	—
» éruptives quaternaires . .	—	0,97 à 1,76

Pour que ces chiffres aient un sens, il est indispensable d'adopter l'hypothèse de tel ou tel chemin de propagation ; dans les chiffres précités, on a généralement adopté l'hypothèse d'une propagation presque rectiligne au travers du globe, tout d'abord parce que ces mesures semblent montrer que la distance parcourue n'est proportionnelle au temps que dans cette hypothèse, ensuite parce qu'il y a, comme nous allons le voir, une raison analytique, plus ou moins plausible, pour qu'il en soit ainsi.

Après les frissons précurseurs, qui se succèdent sans discontinuité, arrivent les ondes de l'ébranlement principal, du tremblement de terre proprement dit, qui ont évidemment une amplitude beaucoup plus grande et une vitesse de propagation moindre que celles des frissons précurseurs. Láska, Stiatessi, Rizzo indiquent 3,98 kilomètres par seconde pour cette vitesse; Imamura, 4,5; Wiechert, 3,5; Love, de 3 à 3,5 ([303]).

Cet ébranlement présente aussi plusieurs phases. La première est caractérisée par des amplitudes moyennes et des périodes relativement longues; de plus, les mouvements hori-

---

([302]) Kinetic Measurement of the Modulus... (*Journal of the College of Science*, Tokyo, t. XX, n° 10); Rigidity of Rocks and Hysteresis Function (*Ibidem*, n° 6).

([303]) Mémoires cités à la note 291. Il est bon de comparer ces chiffres aux résultats des expériences de Fouqué et Lévy, de H.-L. Abbot, de J. Milne, de Mallet : ces expériences se rapportaient à l'étude de la propagation d'ondes élastiques causées par des explosions « artificielles ». Voyez Fouqué et Lévy, Mission d'Andalousie... (*Mém. Ac. Sc.*, Paris, (2), t. XXX, 1889, pp. 57-77); M.-P. Rudzki, Mémoire cité à la note 34, chap. VI, pp. 368-388); etc.

zontaux du sol, pendant cette phase, ont des composantes transversales (c'est-à-dire normales à la direction de propagation) considérables, vis-à-vis des composantes longitudinales : c'est ce qu'on peut appeler une *prépondérance du mouvement transversal*. La deuxième phase présente aussi une telle prépondérance, mais semble avoir des périodes plus courtes. La troisième se distingue nettement des deux premières, car le mouvement longitudinal y prédomine, les périodes sont encore plus courtes que celles de la deuxième et d'ailleurs diminuent graduellement ([304]). Après l'ébranlement principal vient la « queue » du tremblement de terre, phase dans laquelle les oscillations diminuent petit à petit en amplitude, mais perdurent généralement longtemps : en un mot, l'amortissement est lent.

Après un fort tremblement de terre, on remarque ordinairement plusieurs « chocs en retour », plus faibles, naturellement, que l'ébranlement direct, et qui vont graduellement en s'affaiblissant et se faisant plus rares; leur durée peut d'ailleurs être assez longue ([305]) (*aftershocks* des Anglais). Parfois on remarque, en un endroit, une série de petites oscillations qui ne peuvent en aucune façon être baptisées du nom de « tremblements de terre » proprement dit; on peut les appeler *tremble-*

([304]) Cf. Knott, Rudzki, Love, Traités cités respectivement aux notes 28, 22, 24, spécialement celui de Knott, chap. XI, p. 200, et aussi Bouasse, Ouvrage et tome cités à la note 291, ch. III, §§ 88, p. 102. On peut se former une juste idée des circonstances du phénomène des tremblements de terre en consultant les dix-sept Rapports du *Seismological Committee of the British Association for the Advancement of Science* : Liverpool, 1896, pp. 180-229; Toronto, 1897, pp. 129-206; Bristol, 1898, pp. 179-276; Douvres, 1899, pp. 161-238; Bradford, 1900, pp. 59-120; Glascow, 1901, pp. 40-54; Belfast, 1902, pp. 59-75; Southport, 1903, pp. 77-85; Cambridge, 1904, pp 41-51; Afrique du Sud, 1905, pp. 83-94; York, 1906, pp. 92-103; Leicester, 1907, pp. 83-93; Dublin, 1908, pp. 60-112; Winnipeg, 1909, pp. 48-65; Sheffield, 1910, pp. 44-71; Portsmouth, 1911, pp. 30-67; Dundee, 1912, pp. 69-103. On peut également avoir un aperçu des Travaux des précurseurs de la Sismologie en consultant les Comptes rendus de la même *British Association*, des années 1841, 1842, 1843, 1844, 1847, 1850, 1851, 1852, 1854, 1858, 1861, etc.

([305]) Cf. E. Oddone, Quelques constantes séismiques (*Veröffentlichung des Intern. Seismol. Zentralbureaus*, Strasbourg, 1907.)

ments en essaim. Enfin il peut arriver qu'une vibration faible puisse déclancher de grandes forces, provenant de tensions internes arrivées à un haut degré et en état d'équilibre instable : un télésisme de faible intensité peut alors être cause d'un tremblement de terre beaucoup plus important ; on peut appeler ce dernier genre de tremblement *tremblement de relais*, comme le font les auteurs allemands (306) (*Relaisbeben*). Les tremblements de terre consistent non seulement en des mouvements horizontaux du sol, mais encore en des mouvements verticaux, qui sont généralement enregistrés par des appareils spéciaux (307). F. de Montessus de Ballore ne trouve (308), dans la série innombrable de tremblements de terre qui ont succédé au terrible bouleversement de la Calabre en 1783, que vingt-deux cas où l'œil humain a pu apercevoir nettement ce mouvement du sol ; au tremblement de terre de l'Assam en juin 1897, les ondulations du sol avaient un mètre d'amplitude !

Cette description faite, examinons quelles sont les explications théoriques que l'on a proposées pour les mouvements sismiques.

S. D. Poisson a montré (309) qu'un millieu illimité élastique, homogène et isotrope peut transmettre deux espèces d'ondes planes possédant des vitesses de propagation différentes ; et qu'à une distance suffisamment grande de la source de l'ébranlement, le mouvement vibratoire de l'onde la plus rapide est *longitudinal*, c'est-à-dire que le déplacement des éléments se fait parallèlement à la direction de la propagation, tandis que celui transmis par l'onde la plus lente est *transversal*, c'est-à-dire normal à cette direction.

---

(306) Cf. Rudzki, Traité cité à la note 22, chap. V, § 8, p. 184.

(307) Cf, par exemple, E.-M.-S. Navarro-Neumann, S. J,, Article cité à la note 293, § II, pp 323-326.

(308) Cf. *La science séismologique*, Paris, 1907, p. 436.

(309) Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques. (*Mém. Ac. Sc.*, Paris, t. X, 1831) ; cf. H. Burkhardt, Ouvrage cité à la note 6, t. I, § 64, pp. 607-612, spécialement p. 610.

Environ vingt ans plus tard, G. G. Stokes (310) a prouvé que l'onde rapide est une onde de dilatation irrotationnelle, tandis que la seconde est une onde, dite « de distorsion » (suivant l'expression anglaise), ne produisant pas de changement de volume, mais étant caractérisée par la rotation des éléments en chaque point du milieu. Les vitesses des deux ondes sont respectivement

$$A = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad B = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{83}$$

où ρ est la densité uniforme et λ, μ les deux constantes élastiques de Lamé du milieu « parfaitement » homogène.

Stokes a aussi fait voir que, si la distance séparant le lieu considéré de la région originaire est suffisamment grande, les deux ondes sont complètement séparées.

Pendant un certain temps, savoir les quelques années suivant la date d'invention des sismographes et de découverte des frissons avant-coureurs, les sismologues ont cru que l'onde A (311) produisait ces frissons et que l'onde B amenait l'ébranlement principal; mais cette opinion a été bientôt abandonnée. On va en voir de suite la raison. La théorie de Stokes concernant les ondes de dilatation et de distorsion ne tient pas compte de l'influence d'une surface-frontière limitant le milieu. G. Lamé pensait (312) qu'une telle surface ne changerait pas la nature des ondes venant la rencontrer, mais en cela il se trompait (313). Lorsque les ondes atteignent la surface, elle s'y réfléchissent,

---

(310) Mémoire cité à la note 15. Cf. G. Wertheim, Mémoire cité à la note 16.

(311) Nous disons, par ellipse, onde A pour onde de dilatation de vitesse de propagation A, etc. L'idée en question semble être venue de A. Cancani et avoir été tout d'abord défendue par Knott et Milne, au contraire combattue par Agamennone. Voyez à la note 291 les Travaux de ces auteurs.

(312) Ouvrage cité à la note 13, 11e leçon.

(313) Cf. H. Lamb, Premier Mémoire cité à la note 17, p. 195.

comme pourraient le faire des ondes sonores, lumineuses ou électro-magnétiques; mais le phénomène est complexe, car, en général, l'onde A donne naissance, par réflexion, à des ondes d'espèce A et d'espèce B, et il en est de même pour l'onde B. On peut dès lors essayer de se représenter l'état de vibration d'un corps limité, tel que le globe, en superposant ces ondes les unes aux autres. Mais il est très difficile, sans employer l'outil de l'analyse, de suivre toutes les phases du mouvement vibratoire auquel une telle superposition, et combinaison, peut donner lieu et de se rendre un compte exact des différentes circonstances de ce mouvement. Une découverte, faite il y a environ vingt-neuf ans, a complètement changé la théorie des mouvements sismiques. Lord Rayleigh (314) a montré qu'une vibration de dilatation sans rotation et une vibration de distorsion sans dilatation peuvent être telles qu'aucune des deux ne pénètrent profondément sous la surface-frontière d'un corps limité possédant l'homogénéité parfaite, et que cette surface reste sans tension. Dans son étude il néglige l'influence de la pesanteur et suppose que la surface est un plan indéfini. De telles ondes superficielles sont planes; elles sont à présent nommées *ondes de Rayleigh*.

Si nous supposons que la surface-limite soit un plan horizontal, les vibrations de ces ondes ont une composante horizontale *longitudinale* et une composante *verticale*. La composante horizontale est plus faible que la verticale; le rapport de ces deux composantes est exprimé par (315)

$$s = \frac{\sqrt{1 - \frac{C^2}{B^2}}}{1 - \frac{1}{2}\frac{C^2}{B^2}}, \qquad (84)$$

(314) Mémoire cité à la note 22, ainsi que les autres références données dans la même note.

(315) Voyez, par exemple, Rudzki, Ouvrage cité à la note 22, chap. V, § 3,

où B est la vitesse (83) et C la vitesse de propagation des ondes en question. Cette dernière vitesse est indépendante de la longueur d'onde et vaut

$$\left\{\begin{array}{ll} C = 0{,}9554\ B, & \text{pour } \lambda = \infty, \text{(incompressibilité)}, \\ \text{et} \\ C = 0{,}9194\ B, & \text{pour } \lambda = \mu, \text{(hypothèse de Poisson)}, \end{array}\right. \tag{85}$$

valeurs auxquelles correspondent respectivement

$$\left\{\begin{array}{l} s = 0{,}5437, \\ s = 0{,}6812. \end{array}\right. \tag{86}$$

Dans son Mémoire, Lord Rayleigh émettait l'opinion que des ondes du type en question pouvaient peut-être jouer un rôle important dans le phénomène des tremblements de terre : « It is not improbable that the surface waves here investigated play an important part in earthquakes... » [316]. Puisque ces ondes ne peuvent pénétrer profondément sous la surface-limite [317], elles ne se répandent, pratiquement, que suivant deux dimensions et acquièrent ainsi, vis-à-vis d'autres ondes se propageant suivant trois dimensions, une prépondérance qui augmente constamment avec le chemin parcouru [318].

L'opinion de Rayleigh sur l'importance des ondes superficielles dans l'explication des phénomènes sismiques n'a pas été tout d'abord bien accueillie par les sismologues : on lui objectait principalement que les sismogrammes enregistrés ne

---

p. 154, form. (26). Pour ce qui concerne l'ensemble de la théorie des ondes de Rayleigh, voyez, outre les Mémoires et Ouvrages mentionnés à la note 314, E. Wiechert, Mémoire cité à la note 26, § 14, pp. 461-466 ; etc.

[316] Mémoire cité à la note 22, p. 11.

[317] Lorsqu'on parle d'*ondes superficielles*, on ne veut pas entendre que ces ondes n'affectent, rigoureusement parlant, que la surface-limite même, mais, comme les phrases précédentes l'ont fait prévoir, que leurs amplitudes décroissent rapidement avec la profondeur. Cf. Rudzki, Traité cité à la note 22, chap. V, § 3, p. 155.

[318] Rudzki, *Ibidem*.

montraient pas une prépondérance des mouvements verticaux de l'écorce vis-à-vis de ses mouvements horizontaux, comme cela devait être, d'après (86).

R. D. Oldham a essayé ([319]) de paralléliser les recherches analytiques et les observations. D'après lui, les frissons avant-coureurs présentent deux phases bien distinctes, et ces phases sont reçues, aux diverses stations d'observation, à des époques qui correspondent au passage, *à travers le globe*, d'ondes sphériques se propageant avec des vitesses pratiquement constantes, mais différentes l'une de l'autre. Il a donc proposé d'identifier la première et la seconde phase des frissons précurseurs respectivement avec les ondes de dilatation A et les ondes de distorsion B de Stokes. Au contraire, il regarde l'ébranlement principal comme un choc propagé par les ondes superficielles de Rayleigh ([320]),

L'idée que la première et la seconde phase des frissons avant-coureurs correspondent à l'arrivée des ondes A et B de Stokes a été bien accueillie par les sismologues ([321]). Mais l'identification des vibrations de l'ébranlement principal avec les ondes de Rayleigh a été combattue : on a objecté qu'en fait on ne constate pas de prédominance de mouvements verticaux, dans les oscillations du sol, et que, de plus, la théorie de Rayleigh ne rend pas compte des mouvements horizontaux

---

([319]) Mémoire cité à la note 299. Voyez encore Bouasse, Ouvrage et tome cités à la note 291, ch. III, § 91, pp. 105-106.

([320]) Oldham, *Ibidem*, pp. 173-174, conclusions 6 et 8. Oldham constatait certaines variations dans les vitesses, mais nous n'en parlerons pas ici.

([321]) Comme un fluide parfait ne peut transmettre des ondes de distorsion, plusieurs sismologues ont cru, en admettant cette explication, pouvoir établir que la Terre est solide jusqu'à une très grande profondeur, si pas entièrement. O. Fisher a combattu cette manière de voir. R. D. Oldham croit qu'à une pression de plusieurs millions d'atmosphères les substances liquides naturelles ne pourraient plus être regardées, même approximativement, comme des fluides parfaits et qu'en conséquence elles deviendraient capables de transmettre des ondes de distorsion (Cf. Oldham, Mémoire cité à la note 25, et renseigné là-même, par inadvertance, comme étant écrit par K. Zöppritz.)

normaux à la direction de propagation qui, au contraire, se manifestent nettement.

Les sismologues japonais pensent que l'ébranlement principal n'a rien à voir avec les ondes superficielles; toutefois l'explication que F. Omori ([322]) veut donner de la propagation de cet ébranlement n'est pas heureuse, est même très critiquable ([323]). Mais le fait que les ondes de l'ébranlement principal semblent, à partir d'une distance de 1000 à 2000 kilomètres de l'*épicentre* ([324]), avoir une vitesse superficielle pratiquement constante, aussi bien dans les ondes directes que dans celles *de réflexion* (car ces ondes semblent, au moins quand l'ébranlement est fort, subir une sorte de réflexion aux antipodes de l'épicentre), plaide fort en faveur de l'hypothèse que, en réalité, ces ondes se propagent le long de la surface. Ajoutons encore que le fait de la « réflexion » dont il vient d'être question et qui donne un choc en retour montre que la perte d'énergie que subissent ces ondes dans leur propagation est *relativement* faible : cette propriété semble mieux être en rapport avec la théorie des ondes superficielles qu'avec celle d'ondes analogues aux ondes de Stokes ([325]).

La propagation d'un ébranlement partant d'une région de dimensions finies d'un corps parfaitement homogène et limité par un plan indéfini a été étudiée très complètement par H. Lamb ([326]). L'ébranlement perçu en un point distant de la région originaire commence brusquement à l'instant où les

---

([322]) The Great Indian Earthquake of 1905 (*Public. Earthquake Investig. Comm* , Tokyo, 1907, n° 23); spécialement p. 273.

([323]) Cf. Rudzki, Ouvrage cité à la note 22, chap. V, § 3, p. 157, et § 5, p. 164.

([324]) Point de la surface du globe où les premiers symptômes d'un tremblement de terre se manifestent.

([325]) Cf. Rudzki, *Ibidem*, p. 156. Pour ce qui concerne la grandeur de la perte d'énergie, consultez G. Angenheister, Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption von Erdbebenwellen, . . (*Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss.*, Göttingen, 1906, pp. 110-120.)

([326]) Deux Mémoires cités à la note 27.

ondes A de Stokes y parviennent; la surface se soulève, puis s'affaisse graduellement sans oscillation. Lorsque les ondes B arrivent au point considéré, une légère secousse a lieu; mais lorsque les ondes superficielles C de Rayleigh surviennent, la secousse est beaucoup plus forte : après quoi le mouvement diminue graduellement, et cet affaiblissement se prolonge — en théorie — indéfiniment. La théorie de Lamb rend très bien compte de certaines particularités que l'on observe dans les sismogrammes, savoir les deux phases de frissons avant-coureurs et celle de l'ébranlement principal; elle rend compte également de l'effacement graduel du mouvement que l'on remarque dans la « queue ». Mais elle, non plus, n'explique l'existence des mouvements horizontaux, normaux à la direction de propagation, qui se manifestent non seulement dans l'ébranlement principal, mais encore dans la seconde phase des frissons précurseurs. Cette dernière particularité peut s'expliquer, si l'on imagine que l'ébranlement initial soit d'une nature un peu spéciale ([327]); mais la difficulté subsiste pour l'ébranlement principal : en effet, dans un corps homogène et isotrope, il ne peut se produire des ondes transversales qui, pratiquement, soient limitées aux régions superficielles. Lamb ([328]), puis Love ([329]) ont tenté une explication; celle de ce dernier est particulièrement intéressante et repose sur la considération de l'influence que peut avoir une écorce d'une autre constitution que le noyau. Avant lui, E. Wiechert ([330]) et C.-G. Knott ([331]) avaient proposé une explication du même genre.

Au fond, ils expliquent ces mouvements transversaux par des réflexions et réfractions successives aux surfaces limitant

---

([327]) Cf. Love, Ouvrage cité à la note 24, chap. XI, § 162, p. 147.

([328]) Second Mémoire cité à la note 27.

([329]) Ouvrage cité à la note 24, chap. XI, art. 182-193, pp. 165-177, et Introduction, p. xxv.

([330]) Mémoire cité à la note 26, § 5, p. 429 et surtout § 16, p. 470.

([331]) Traité cité à la note 28, chap. XII, p. 257.

l'écorce et celles séparant les couches sphériques d'égale densité dont cette écorce hétérogène serait composée. Mais rien n'empêche, dans leurs théories, que les ondes en question ne pénètrent profondément dans le noyau (332).

Maintenant on doit se demander quelle est la raison pour laquelle on n'observe pour ainsi dire jamais un repos complet entre les diverses phases des vibrations sismiques. On peut donner, du phénomène de la continuité des ébranlements, plusieurs explications (333).

Tout d'abord on peut supposer que, dans les périodes d'interruption qui, théoriquement, doivent séparer les diverses phases, parviennent en retard certaines ondes de phases antérieures, qui ont subi une série de réflexions ou de réfractions sur les surfaces de délimitation.

On peut admettre aussi que les ondes sismiques subissent une *dispersion* quelque peu analogue à la dispersion lumineuse (334), mais non identique. D'après F. Omori (335), les ondes se mouvraient, à diverses profondeurs, parallèlement à la surface et n'y parviendraient que successsivement : cette atteinte d'une surface à laquelle les ondes devraient rester parallèles implique une vraie contradiction (336). Enfin, une quatrième explication consiste à attribuer la continuité de l'ébranlement à des oscillations « propres » de l'appareil qui a tracé le sismogramme, ce qui peut facilement être constaté et ne correspond d'ailleurs à aucun mouvement réel du sol, et surtout à des oscillations « propres » des couches de l'écorce terrestres sur lesquelles repose le sol du lieu considéré. Dans les sismogrammes enregistrés en un même lieu, on constate souvent la prédominance d'une période : il est permis

---

(332) Pour les relations qui unissent ces théories à l'hypothèse d'une couche plastique inférieure à l'écorce, cf. E. Wiechert, Mémoire cité à la note 26, § 15, p. 468.

(333) Cf. Rudzki, Ouvrage cité à la note 22, chap. V, § 5, pp. 163-167.

(334) Voyez à ce sujet, Rudzki, *Ibidem*, pp. 164-165, et Bouasse, Ouvrage et tome cités à la note 291, ch. III, § 90, pp. 104-105.

(335) Mémoire cité à la note 322.

(336) Cf. note 323.

de penser que les oscillations possédant cette période sont dues à des vibrations « propres » des couches avoisinantes, déclanchées par les ondes sismiques proprement dites. C'est à Wiechert ([337]) qu'est due cette remarque; toutefois la conclusion qu'il en tire ([338]) relativement à l'épaisseur de l'écorce terrestre semble bien devoir être rejetée ([339]). Knott a montré ([340]), après Omori, que les sismogrammes qui ont servi à enregistrer, à Tokyo, les tremblements de terre du Japon montrent toujours une prépondérance des vibrations ayant la période 4,6 secondes dans les frissons précurseurs aussi bien que dans les petites pulsations habituelles des périodes de calme relatif qui parviennent à Tokyo : d'après lui, cette période de 4,6 secondes serait la période naturelle de vibration de la plaine où Tokyo est assise. Omori ([341]) distingue, pour un endroit déterminé, plusieurs périodes suivant presque toutes la loi de décroissance harmonique.

La « queue » des tremblements de terre peut aussi être expliquée au moyen d'oscillations naturelles du sol, s'amortissant peu à peu; cependant on remarque parfois, dans la « queue », certains renforcements temporaires de l'amplitude, ce qui ne permet donc pas à cette explication de rendre compte de la totalité du phénomène.

L'existence d'une écorce ayant des propriétés différentes de celles du noyau a pour conséquence que les frissons avant-coureurs ne peuvent se propager rigoureusement en ligne droite à l'intérieur du globe, mais, en subissant des réfractions en passant d'un milieu dans un autre, doivent dévier; *a fortiori*, si l'écorce et le noyau ne sont pas, séparément, parfaitement homogènes, la propagation rectiligne des ondes de Stokes est-elle rendue impossible. L'étude des réflexions et réfractions de ces dernières ondes est très complexe; nous ne

---

([337]) Mémoire cité à la note 26, § 15, pp. 466-469.

([338]) Ibidem, p. 468.

([339]) Cf. Rudzki, Ouvrage cité à la note 22, chap. V, § 5, p. 166.

([340]) Ouvrage cité à la note 28.

([341]) Mémoire cité à la note 322, p. 211, et Rudzki, *Ibidem*, pp. 166-167.

pouvons pas entrer ici dans les nombreux développements qu'elle comporte. Nous nous bornons à renvoyer le lecteur au beau Mémoire de E. Wiechert et K. Zöppritz plusieurs fois cité (342), ainsi qu'aux Travaux classiques de Benndorf, Milne, Kövesligethy, Zöppritz, Rudzki, Oldham, Knott, Kusakabe, Galitzin, etc., mentionnés également ci-dessus (343).

L'affirmation que les vibrations A, B, C ont une vitesse de propagation indépendante de leur longueur d'onde et sont absolument indépendantes entre elles repose sur l'hypothèse faite sur la constitution du milieu (homogénéité parfaite) et, au moins pour ce qui concerne les vibrations de Stokes, sur l'hypothèse simplificatrice de l'absence de surface-limite. De plus, dans leur théorie, on n'a pas tenu compte de l'existence possible d'une tension initiale, ni de l'influence que pouvait avoir la self-attraction des molécules du milieu sur leur jeu oscillatoire, etc.

Nous venons de dire que nous ne pouvons étudier en détail la théorie des réflexions et réfractions des diverses ondes; en effet, une telle étude nous mènerait beaucoup trop loin. Quant à l'influence de la self-attraction sur le jeu des oscillations, c'est, avons-nous dit ci-dessus (344), T. J. l'A. Bromwich qui l'a considérée le premier (345), mais son étude est incomplète, car il suppose la substance vibrante incompressible. Lord Rayleigh a montré (346) l'importance que doit avoir l'existence d'une tension initiale considérable, telle que celle qui résulterait des

---

(342) Cf. note 26. Voyez aussi E. Wiechert, Die Erdbebenforschung, ihre Hilfsmittel und ihre Resultate für die Geophysik (Vortrag von der 79ten Naturforscherversammlung zu Dresden) [*Physikalische Zeitschrift*, 1908, t. IX, n° 1.]

(343) Cf. note 291. Voyez aussi l'hypothèse de la *couche de vitesse maxima* proposée par H. Nagaoka, Elastic Constants of Rocks... (*Public. Earthquake Investig. Comm.*, Tokyo, 1900, n° 4). Pour la variation de la vitesse de propagation avec la profondeur, voyez encore T. Shida, Mémoire cité à la note 45, ch. IV, pp. 225-248, spécialement nos 8-9, pp. 243-248.

(344) Voyez note 23.

(345) Mémoire cité à la note 23.

(346) Voyez notes 37 et 119.

forces newtoniennes s'exerçant sur chacune des molécules composant un globe, doué d'attraction, de dimensions comparables à celles de la Terre. C'est A.-E.-H. Love qui, s'inspirant des Travaux de ces deux physiciens et de Jeans ([347]), a su donner, le premier, une théorie vraiment satisfaisante de la vibration d'un globe parfaitement homogène et compressible ([348]).

Le premier résultat que Love obtient est celui-ci : les ondes B se propagent de la même façon que dans un globe où n'existerait pas d'attraction, tandis que le mode de transmission des ondes A est changé. D'ailleurs, des ondes A de dilatation ne peuvent être, dans ce cas, purement irrotationnelles. De plus, leur vitesse de propagation n'est plus constante, mais dépend en partie de la constitution physique du globe au lieu atteint et en partie de la longueur d'onde, les ondes de longueur faible se propageant plus rapidement que celles de grande longueur; ce qui indique qu'il se produit une « dispersion » ([349]). Love trouve aussi que la vitesse de propagation des ondes C de Rayleigh n'est que peu affectée par la gravitation, mais doit croître, lentement il est vrai, avec la longueur d'onde ([350]).

La principale objection qu'on élève contre l'assimilation des ondes d'ébranlement principal d'un tremblement de terre avec les ondes superficielles C réside dans ce que les oscillations horizontales du sol que l'on observe sont principalement transversales ([351]) : on sait, en effet, que, dans un corps homogène, les ondes C ont une composante horizontale longitudinale, et aucune autre espèce d'ondes que celle-là ne peut se

---

([347]) Voyez notes 36 et 116.

([348]) Cf. Mémoire cité à la note 38, et Ouvrage cité à la note 24, chap. X-XI.

([349]) Ouvrage cité à la note 24, chap. XI, art. 165-170, pp. 149-154. Cf. Mémoire cité à la note 38, §§ 41-43, pp. 215-216.

([350]) *Ibidem*, chap. XI, art. 171-175, pp. 154-160.

([351]) Voyez note 329. Le mot « horizontales » veut dire (composantes) dans le plan tangent à la surface-limite. Cf. WIECHERT et ZÖPPRITZ, Mémoire cité à la note 26, § 16, pp. 470-473.

borner à n'affecter que les régions superficielles. Pour tourner la difficulté, Love admet l'existence d'une écorce mince ayant des propriétés physiques différentes de celles du noyau, et découvre ainsi qu'il peut se produire, dans un corps présentant une telle hétérogénéité, des ondes superficielles *transversales* (352). Love cherche aussi ce que deviennent, dans une telle hypothèse, les ondes de Rayleigh proprement dites (353) et obtient ainsi des résultats très intéressants que nous ne pouvons rapporter en détail. Venons maintenant à la détermination qui nous intéresse, savoir celle de la rigidité du globe.

Il est clair que, vu les complications effroyables qu'une constitution du globe telle que celle que nous avons admise ci-dessus, dans l'exposé des trois premières méthodes (savoir une distribution en couches concentriques d'égale densité) doivent apporter dans la théorie de la propagation des ondes élastiques, nous serons obligés de nous borner à considérer le globe comme « parfaitement » homogène et compressible et d'admettre que toutes les ondes, dont on a mesuré la vitesse de propagation, sont « directes » et non pas des ondes réfléchies ou réfractées. Nous admettrons encore que les ondes des deux phases des frissons avant-coureurs se propagent en ligne droite au travers du globe respectivement avec les vitesses constantes A, B des ondes de Stokes (354), et que les ondes de l'ébranlement principal se propagent le long de la surface avec la vitesse constante C des ondes superficielles de Rayleigh. Il est clair que les résultats que nous obtiendrons n'auront aucune valeur quantitative; mais ils pourront cependant nous

---

(352) Ouvrage cité à la note 24, chap. XI, art. 176-181, pp. 160-165.

(353) Ouvrage cité à la note 24, chap. XI, art. 182-193, pp. 165-177.

(354) Pour l'influence de la température, de la pression, etc. sur la vitesse de propagation des ondes, consultez (outre les Traités mentionnés de KNOTT, RUDZKI, LOVE) M.-P. RUDZKI, O rochodzenia się drgán... (*Rosprawy Wydziału mat.-przyr. Akademii Umiejętności*, Cracovie, 1896, t. XXXIII); traduction allemande : Ueber die scheinbare Geschwindigkeit der Verbreitung des Erdbeben [*Beiträge zur Geophysik* (GERLAND), t. III, 1898, pp. 485-518; voyez aussi même périodique, t. IV, 1900.]

renseigner sur l'ordre de grandeur de la rigidité « dynamique » du globe, pour autant que les assimilations faites ci-dessus soient admissibles.

Relativement à la légitimité de ces assimilations, nous signalerons l'opinion de l'éminent sismologue C.-G Knott (355) : « The existence of three distinct types of earthquake radiations is now generally admitted, the most energetic part known as the large waves or principal portion being almost certainly transmitted through the comparatively thin heterogeneous layer which forms the so-called crust of the Earth. The first and second phases of the preliminary tremors must be regarded as essentially elastic vibrations transmitted from the earthquake focus along brachistochronic paths to all parts of the Earth's surface. My own opinion is that these paths are concave outward but nearly rectilinear in their deeper portions so that in most cases they do not deviate far from lines of chords ». Pour Wiechert (356), l'assimilation des ondes d'ébranlement principal avec les ondes de Rayleigh ne doit être faite qu'avec certaines précautions; d'ailleurs Knott pense de même (357). Ce dernier trouve (358) pour la vitesse des ondes A de dilatation, au travers du globe, 12,2 kilomètres par seconde, en admettant que ces ondes produisent la première phase des frissons précurseurs; de plus il obtient $\frac{A}{B} = 1{,}74$ pour rapport des vitesses A, B des ondes de Stokes. Cela lui donne B = 7 kilomètres par seconde pour la vitesse de propagation des ondes amenant la seconde phase des frissons avant-coureurs. Alors, par (83),

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = (1{,}74)^2 = 3 \text{ environ},$$

d'où $\lambda = \mu$ très sensiblement (relation de Navier et Poisson).

---

(355) Ouvrage cité à la note 28, chap. XII, p. 240.
(356) Mémoire cité à la note 26, § 16, pp. 471-473.
(357) Ouvrage cité à la note 28, chap. XII, pp. 256-257.
(358) Ouvrage cité à la note 28, chap. XII, p. 251.

On tire de

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = 12{,}2 \text{ km/sec.}$$

la valeur

$$\lambda = \mu = 32{,}1 \times 10^{11} \text{ dynes par cm}^2, \qquad (87)$$

si l'on admet $\rho = 6{,}47$ grammes-masse par centimètre cube : ce dernier chiffre est obtenu en supposant une densité moyenne du globe entier de 5,55, ce dernier possédant cependant une écorce de densité 3 et d'une épaisseur valant le dixième du rayon : ρ est alors la densité moyenne du noyau au travers duquel la propagation des frissons précurseurs se fait en majeure partie ([359]). La rigidité que l'on obtient par ce procédé dynamique est énorme, car elle est quatre fois environ aussi grande que la valeur la plus probable que nous avons trouvée ci-dessus.

Comme nous l'avons dit plus haut ([360]), Brill emploie simultanément la troisième et la quatrième méthode pour déterminer les rigidités de l'écorce et du noyau d'un globe composé suivant l'hypothèse de Wiechert. Les recherches de Wiechert et de Zöppritz ([361]) montrent que la vitesse de propagation des ondes B croît uniformément de 4 kilomètres-seconde à 6,75 kilomètres par seconde de la surface du globe jusqu'à 1500 kilomètres de profondeur, puis reste constante et égale à 6,75 kilomètres par seconde de 1500 à 4000 kilomètres de profondeur; quant à la vitesse au delà de cette dernière profondeur, on ne connaît rien de certain. Brill ([362]) prend pour vitesse moyenne dans l'écorce B = 5,25 kilomètres

---

([359]) Il ne s'agit donc pas ici d'une homogénéité « parfaite » du globe entier. Cf. Rudzki, Ouvrage cité à la note 22, chap. V, § 6, p. 173.

([360]) Cf. note 286.

([361]) Mémoire cité à la note 26. Voyez aussi l'important Article de E. Wiechert cité à la note 342, et le Mémoire de T. Shida cité à la note 45, ch. IV, n° 8, p. 243. Le globe de Brill incompressible) ne peut transmettre d'ondes de dilatation.

([362]) Mémoire cité à la note 44, chap. II, § 8, pp. 59-60.

par seconde et pour densité $\rho_e = 5{,}2$ grammes-masse par centimètre cube et en déduit, par une formule qui nous paraît inexacte, $\mu_e = 7{,}13 \times 10^{11}$ dynes par centimètre carré. En introduisant alors cette dernière valeur dans les formules relatives à l'allongement de la période eulérienne (troisième méthode ci-dessus), il trouve $\mu_n = 14{,}48 \times 10^{11}$. Il est à remarquer que si μ_e varie de $5{,}9 \times 10^{11}$ à $14{,}4 \times 10^{11}$, μ_n ne varie que de $14{,}25 \times 10^{11}$ à $14{,}75 \times 10^{11}$.

Love prend comme résultats d'observation [363]

$$A = 10 \text{ km/sec.}, \qquad B = 5 \text{ km/sec.}, \qquad C = 3 \text{ km/sec.},$$

et ajoute : « The identification of the three sets of disturbances with the three sets of waves which are theoretically known seems to be inevitable, and the discrepancy between the ratio of velocities of equivoluminal (B) and superficial (C) waves and the ratio of velocities of the second set of tremors and the main shock [364] may be explained by the supposition that, while the velocity of transmission of these tremors depends upon the mean rigidity of the Earth as a whole, the velocity of transmission of the main shock depends upon the average rigidity of surface rock ».

Il obtient d'abord, par (83),

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 4,$$

d'où $\lambda = 2\,\mu$; puis $\mu = (5 \times 10^5)^2\, 5{,}5 = 13{,}75 \times 10^{11}$, et $\lambda = 27{,}5 \times 10^{11}$ (88). Tandis que pour la rigidité de l'écorce il part de

$$0{,}9 \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho}} = 3 \times 10^5$$

---

[363] Mémoire cité à la note 38, § 40, pp. 214-215. Knott a donné, comme résultats des premières mesures de Milne : $A = 9{,}17$; $B = 6{,}25$; $C = 3$ [Cf. Ouvrage cité à la note 28, ch. XII, p. 226]. Ces dernières valeurs sont aussi à peu près celles qu'adopte Bouasse [Ouvrage et tome cités à la note 291, ch. III, § 90, pp. 103-104].

[364] Ce rapport $\frac{3}{5} = 0{,}6$ est très différent du coefficient théorique, qui est voisin de 0,9 [cf. nos formules (85)].

et obtient

$$\mu_e = (3 \times 10^5)^2 . \frac{5,5}{0,9} = 5,5 \times 10^{11}; \qquad (89)$$

quant à λ_e, il ne le détermine pas.

Il remarque lui-même que, pour obtenir ces valeurs, il n'a pas tenu compte de la « tension initiale » et de la gravitation, circonstances auxquelles nous avons déjà fait allusion plus haut (365), et il montre que, lorsqu'on y a égard, la loi théorique de l'indépendance de la vitesse de propagation et de la longueur d'onde (et de la position du lieu d'observation) est en défaut; d'où il résulte que notre procédé, pour déterminer μ, est trop simpliste. Comme nous l'avons dit ci-dessus (366), Love a étudié d'une manière beaucoup plus détaillée les circonstances de la propagation des ondes, dans un Ouvrage paru récemment.

Après avoir remarqué que l'influence quantitative de la gravité sur les ondes de Rayleigh proprement dites est très faible, il fait voir que si l'on néglige la difficulté provenant des mouvements superficiels transversaux, que l'on admette l'homogénéité parfaite du globe (367) et qu'on substitue dans la formule précédente

$$0,9 \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho}} = 3 \times 10^5,$$

la valeur $\rho_s = 2,8$ de la densité moyenne des roches superficielles, on obtient

$$\mu_e = 2,8 \times 10^{11} \qquad (90)$$

pour rigidité moyenne de ces roches : ce qui n'est pas très

---

(365) Cf. notes 345 et 346.

(366) Cf. notes 348-353.

(367) Sauf pour l'écorce comparée au noyau.

éloigné des chiffres d'Adams et Coker pour les marbres (368) de la surface.

Avec l'hypothèse d'une écorce distincte du noyau, supposé sphérique, il peut se produire des ondes superficielles transversales (369), et ces ondes semblent avoir encore plus de parenté avec les ondes d'ébranlement principal que les ondes de Rayleigh proprement dites. En faisant l'assimilation en question, on pourrait en déduire une nouvelle valeur de la rigidité μ_e de l'écorce.

Dans un exemple numérique particulier (370), Love trouve que la valeur de la vitesse C' des ondes superficielles transversales n'est supérieure à celle C des ondes de Rayleigh que de 1 %; comme dans le calcul précédent, nous n'avons fait figurer, dans le coefficient de $\sqrt{\frac{\mu_e}{\rho}}$, que les dixièmes d'unité et avons ainsi négligé les centièmes, nous obtenons la même valeur approchée (90) de μ_e en adoptant la conclusion de Love, donnée dans un cas particulier (un peu différent il est vrai).

Ces derniers calculs sont parfaitement grossiers et conduisent à des résultats assez différents de ceux trouvés par les trois premières méthodes. Il semble, d'une façon générale, que cette quatrième période donne une plus grande valeur, pour la rigidité du globe, que les premières (371).

Relatant les ingénieuses expériences directes que S. Kusakabe a faites pour déceler la différence qui existe entre les valeurs statiques et dynamiques des coefficients élastiques de certaines substances, C. G. Knott dit (372), après avoir mentionné les chiffres d'Adams et Coker (373) : « In all these cases

---

(368) Cf. note 66.

(369) Cf. notes 351 et 352.

(370) Ouvrage cité à la note 24, chap. XI, § 187, pp. 171-172. On suppose, entre autres, que les densités du noyau et de l'écorce sont les mêmes, tandis que les rigidités sont dans le rapport $\frac{\mu_n}{\mu_e} = 2{,}325$, etc.

(371) Cf. Article de l'*Encykl. d. math. Wiss.* cité à la note 74, n° 37, p. 65.

(372) Ouvrage cité à la note 28, chap. IX, pp. 165-166.

(373) Cf. note 66.

it is the static modulus which is being mesured; but in the propagation of elastic disturbances through the material it is the kinetic modulus which comes into play. In the cases of metal wires, the kinetic and static values of a particular modulus differ slightly; and, according to Kusakabe's ingenious experiments, the difference between the kinetic and static values of the flexural rigidity in rocks is in many cases of considerable magnitude... » Puis, après avoir décrit la méthode du physicien japonais : « Bearing in mind the imperfect elasticity of rock as evidenced by the yielding during application of stress, we should expect the static modulus to be less than the kinetic modulus, since in the latter case the strains are smaller and there is no opportunity for the time lag to declare itself. This was what Kusakabe found to be generally the case; but there were a good many instances in which the kinetic modulus was the smaller. This is probably to be referred to the different condition of the material in the two experiments... » Il semble donc que nous avons eu quelque raison de distinguer le module « dynamique » de rigidité des roches du module « statique ». Toutefois le même sismologue C. G. Knott veut trouver (374) un accord satisfaisant entre les deux coefficients de rigidité, statique et dynamique, déduits respectivemenl des considérations de Hough (375) sur les variations des latitudes pour un globe élastique incompressible et des mesures (376) de la vitesse des ondes de distorsion qu'il détermine lui-même, en employant les corrections de Benndorf.

Il obtient, par la valeur (C'', 58,57) de l'*estimation V* précédente,

$$B = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{9{,}4 \times 10^{11}}{5{,}53}} = 4{,}12 \text{ km/sec.},$$

---

(374) Ouvrage cité à la note 28, chap. XIII, pp. 266-267.

(375) Cf. notes 33, 216, 252.

(376) Ouvrage cité à la note 28, chap. XII, pp. 246-249, et *Proceed. Roy. Soc.*, Édimbourg, 1908.

ce qui ne diffère que peu de la valeur 3,45 kilomètres par seconde qu'il déduit des mesures directes de la vitesse, comptée suivant la surface, des ondes de distorsion ; d'ailleurs il a soin de dire : « It may be assumed that the parts of the Earth which have most effect in producing this change of period are those furthest away from the axis of rotation that is, in the superficial equatorial regions ». D'autre part il fait observer que les valeurs maxima obtenues par Kusakabe (en faisant des mesures directes sur la rigidité des roches superficielles) $5{,}22 \times 10^{11}$ (serpentine des terrains archéens, densité : 2,71) et $4{,}9 \times 10^{11}$ (pyroxénite des terrains paléozoïques, densité : 2,9) et donnent par conséquent B = 4,4 et 4,33 kilomètres par seconde respectivement, ce qui concorde assez bien avec les résultats précédents. Mais il faut remarquer que, pour obtenir ces dernières valeurs, il a posé $\rho = 2{,}71$ ou 2,9 au lieu de $\rho = 5{,}53$, comme il avait fait tout d'abord : ce qui peut sembler un peu arbitraire. Il finit par dire : « The agreement is certainly remarkable, although it must be remembered that Hough's calculation cannot apply without reservation to the Earth, the material of which is to an appreciable extent compressible ».

Tout récemment L. Geiger et B. Gutenberg ([377]) ont trouvé, d'après la mesure de la vitesse de propagation des ondes B de distorsion, que, si l'on admet avec Wiechert une densité de 8,2 à une profondeur de 2500 kilomètres, la rigidité du globe doit y atteindre 36×10^{11} dynes par centimètre carré. Cette valeur énorme conduit W. Schweydar ([378]) à conclure que l'on

---

([377]) Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus des Intensität longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen [*Physikalische Zeitschrift*, Leipzig, 1912, t. XIII.]

([378]) Premier Mémoire cité à la note 41, chap. VIII, pp. 56-57. Ceci est directement contraire à ce que J. Milne disait en 1903 [*Reports of the British Assoc. f. Adv. of Sc.*, Southport, 1903, p. 84] : « ... The high values of 10,5 to 12 km. per second suggest a high rigidity for the world, whilst the approximate uniformity of speed within its core indicate approximate uniformity in those properties which determine the rate at which it transmits vibrations. Unless it is assumed that as we descend in the earth elasticity and density increase in the same ratio, to which hypothesis there are objec-

ne peut supposer le noyau de la Terre homogène, comme on le fait dans l'hypothèse de Wiechert.

Voilà les résultats qu'il nous a paru intéressant de rassembler. On trouvera sans doute que nous ne sommes pas assez catégoriques en tirant nos conclusions et surtout que nous ne donnons pas d'appréciation suffisamment nette sur les valeurs définitives proposées par les divers auteurs pour la rigidité du globe. Mais le problème est hérissé de difficultés : en particulier, l'étude de la propagation des ondes sismiques dans un globe hétérogène est d'une complication effroyable, surtout lorsque l'hétérogénéité est combinée à une anisotropie quelconque (379).

Nous nous proposons d'ailleurs de publier le plus tôt possible une étude analytique approfondie du problème des déformations et des vibrations d'une sphère élastique, en mettant à profit les remarquables Travaux de V. Volterra relatifs aux phénomènes *héréditaires* (380).

Liége, juin 1914.

---

tions, the inference is that the nucleus of the world has a density more nearly uniform than is generally assumed... » Voyez aussi les intéressantes remarques de T. Shida à ce sujet (Mémoire cité à la note 45, Introduction, pp. 18-19).

(379) Pour l'étude de l'anisotropie, on peut consulter avec fruit les belles études de Rudzki et du prince Galitzin (Mémoires cités à la note 291). Enfin il est bon de remarquer que, pour que le globe puisse avoir une figure d'équilibre stable, il est nécessaire que la rigidité soit supérieure à une certaine limite [voyez les Travaux de Love, Jeans, Rayleigh cités aux notes 38, 36, 37] : ceci peut encore donner des indications.

(380) V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, 1913; *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913 (spécialement ch. VI et VIII), et les Mémoires auxquels il renvoie dans ces Ouvrages (renseignements complétant ceux donnés à la note 47). Au chapitre IX (p. 150) de ce dernier Ouvrage il dit : « ... Cette question de la sphère élastique soumise à des tensions données dans le cas héréditaire se rencontre dans l'étude de la rotation de la Terre. Il est évident, en effet, que si l'on veut tenir compte de l'élasticité de la Terre, il est *impossible de négliger les phénomènes d'hérédité*... »

ERRATA ET ADDENDA

Pages.	Notes.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lire :*
10	—	3	K. Zöppritz	R. D. Oldham.
10	25	2	et avec WIECHERT	et K. ZÖPPRITZ, avec E. WIECHERT,
12	38	4	note 117	note 121
13	47	dernière	241.	241. Voyez aussi les indications de la note 380.
14	—	3	1906.	1906; J. HADAMARD, *Leçons professées au Collège de France sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, Paris, 1903.
25	101	3	note 252	note 257
37	136	dernière	et 41.	et 41; et Beobachtung der Aenderung der Intensität der Schwerkraft durch den Mond (*Sitzungsberichte d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1914, nos XIV-XV, pp. 454-465).
46	178	1	1888.	1888; et *Astr. Nachr.*, Kiel, t. CIX, pp. 41-43.
47	191	1	4143.	4143; et *Denkschriften d. K. Akad. d. Wiss.*, Vienne, 1913, t. LXXXIX.
47	196	1	t. III, n° 33.	t. I, 1907, n° 13 et t. III, 1910, n° 33; enfin *Bull. Astr.*, Paris, 1911, p. 48.
48	198	5	BONNSDORFF	BONSDORFF.
48	198	dernière	etc.	F. BISKE, *Astr. Nachr.*, Kiel, 1907, n° 4182; HIRAYAMA, *Ibidem*, 1907, n° 4207; etc.
49	—	11	sur l'étude	à l'étude.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION 3

§ I. — Aperçu sur l'historique du problème de la sphère élastique. . 7

§ II. — Quelques chiffres 14

§ III. — Remarque générale 18

§ IV. — 1re méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des marées océaniques apparentes . . . 19

§ V. — 2e méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des déviations de la verticale. 35

§ VI. — 3e méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des variations de la latitude 43

§ VII. — Combinaison des trois premières méthodes. 60

§ VIII. — 4e méthode : Détermination de la rigidité du globe au moyen de la mesure des vitesses de propagation des ondes sismiques. — Conclusion 81

ERRATA ET ADDENDA 107

TABLE DES MATIÈRES 109